



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Acoplamento entre Cordas Cósmicas e Energia Escura: Abordagem Fenomenológica

Abraão Santana Fidélis de Ataíde

Dissertação de Mestrado
Recife-PE
Julho de 2025

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Abraão Santana Fidélis de Ataíde

Acoplamento entre Cordas Cósmicas e Energia Escura: Abordagem Fenomenológica

Dissertação de mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Antônio de Pádua Santos

Dissertação de Mestrado
Recife-PE
Julho de 2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos
pelo(a) autor(a)

A862a Ataíde, Abraão Santana Fidélis de.
Acoplamento entre cordas cósmicas e energia
escura: abordagem fenomenológica / Abraão
Santana Fidélis de Ataíde. - Recife, 2025.
63 f.; il.

Orientador(a): Antônio de Pádua Santos.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal
Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação
em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 2025.

Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

1. Simetrias de calibre não-abelianas. 2.
Acoplamento mínimo. 3. Corda Cósmica. 4. Energia
Escura I. Santos, Antônio de Pádua, orient. II. Título

CDD 621

À minha mãe e ao meu pai, pelo amor, apoio e incentivo constantes;
ao irmão que a vida me deu, Michell Paulo, por todo o incentivo e investimento em minha vida acadêmica e pessoal;
à memória de Mônica (in memoriam), que foi e sempre será minha inspiração para continuar estudando e seguindo adiante;
aos meus avôs Antonio e Manoel (in memoriam), por deixarem um exemplo sólido de integridade e retidão — agradeço por me sustentarem em cada passo do caminho;
e a todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador, Professor Dr. Antônio de Pádua Santos, pela orientação dedicada, crítica construtiva e apoio contínuo ao longo de toda esta jornada acadêmica.

À memória de Mônica (*in memoriam*), que foi e será sempre minha inspiração para persistir nos estudos e seguir adiante quando tudo parecia difícil.

Estendo minha gratidão aos colegas e amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho, compartilhando conhecimentos, trocando ideias e oferecendo suporte emocional nos momentos de maior desafio.

Reconheço a importância da instituição UFRPE, e agradeço ao corpo técnico e acadêmico, aos bibliotecários e funcionários, pela infraestrutura, disponibilização de recursos e suporte indispensável à pesquisa.

Agradeço à FACEPE pelo apoio financeiro e oportunidade de dedicar-me integralmente à pesquisa.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, participaram desta realização — mesmo aqueles que não foram mencionados nominalmente — pois, sem eles, este trabalho não teria sido possível.



D'où venons-nous ? Que sommes-nous ? Où allons-nous ?, 1897

Óleo sobre tela, 139,1 cm; 374,6 cm

Museu de Belas Artes de Boston

Paul Gauguin

"A verdade é filha do tempo, e não da autoridade."

Galileu Galilei.

Resumo

Resumo

Este trabalho apresenta uma abordagem multifacetada para investigar a atual aceleração cósmica, examinando a interação entre cordas cósmicas e o campo de energia escura, dentro de um arcabouço teórico que combina os princípios da Relatividade Geral com simetrias não abelianas.

Iniciando com uma visão geral concisa do modelo cosmológico padrão Λ CDM e das equações de Friedmann, fundamentadas na Relatividade Geral, o papel da constante cosmológica Λ foi analisado como o motor por trás da dinâmica escura do universo. As evidências observacionais indicam que a energia escura contribui com aproximadamente 68–70

Em seguida, a dissertação aprofunda-se nas simetrias não abelianas, particularmente nas teorias de calibre baseadas em $SU(2)$ ou grupos análogos, como fundamento estrutural para o surgimento de cordas cósmicas topológicas durante as transições de quebra de simetria no universo primordial. Esses modelos de cordas cósmicas não abelianas têm sido amplamente estudados e exibem características ricas — como monopólos e semipólos aprisionados — quando inseridos em cenários cosmológicos com constante cosmológica.

Por fim, analisa-se o comportamento das equações de campo acopladas que regem a interação entre as cordas cósmicas e a energia escura durante a expansão cósmica. Utilizando um termo de acoplamento fenomenológico, o modelo explora como a transferência de energia entre a rede de cordas e o componente de energia escura influencia a evolução do universo. As equações resultantes integram a tensão das cordas, as velocidades médias das cordas e os parâmetros de estado da energia escura no formalismo de Friedmann, produzindo previsões que se desviam sutilmente do modelo Λ CDM puro.

Palavras-chave: Simetrias de calibre não-abelianas, Acoplamento minino, Corda Cósmica, Energia Escura.

Abstract

Anstract

This work presents a multifaceted approach to investigating the current cosmic acceleration by examining the interaction between cosmic strings and the dark energy field, all within a theoretical framework that merges the principles of General Relativity with non-Abelian symmetries.

Beginning with a concise overview of the standard Λ CDM cosmological model and the Friedmann equations, grounded in General Relativity, the role of the cosmological constant Λ was scrutinized as the driver behind the universe's dark dynamics. Observational evidence indicates that dark energy contributes approximately 68–70% of the universe's critical energy density.

Subsequently, the dissertation elaborates on non-Abelian symmetries, particularly gauge theories based on $SU(2)$ or analogous groups, as the structural foundation for the emergence of topological cosmic strings during early-universe symmetry-breaking transitions. These non-Abelian cosmic string models have been studied extensively and exhibit rich features—such as trapped monopoles and semipoles—when embedded in cosmological backgrounds with a cosmological constant.

Finally, we analyze the behavior of the coupled field equations governing the interaction between cosmic strings and dark energy during cosmic expansion. Using a phenomenological coupling term, the model explores how energy transfers between the string network and the dark energy component influence the evolution of the universe. The resulting equations integrate string tension, average string velocities, and dark energy equation-of-state parameters into the Friedmann framework, producing predictions that deviate subtly from the pure Λ CDM model.

Keywords: non-Abelian gauge symmetries, Minimal coupling, Cosmic string, Dark energy.

Lista de Figuras

	Página
2.1 transporte paralelo.	17
2.2 Curva parametrizada.	19
3.1 Distribuição de galáxias por Mpc.	26
3.2 Possíveis representações para os diferentes valores de k	27
3.3 Potencial do tipo chapéu mexicano.	28

Sumário

Agradecimentos	4
	Página
1 Introdução	11
2 Relatividade Geral	14
2.1 Relatividade como geometria	14
2.2 Derivadas covariantes.	15
2.3 Transporte paralelo e Conexões.	16
2.4 Geodésica	19
2.5 Tensor de curvatura de Riemann	20
2.6 Princípio Variacional Relativístico	22
2.7 Equação de Campo	24
3 Modelo Cosmologico Padrão	25
3.1 Breve Histórico da Cosmologia	25
3.2 Corda Cósmicas	28
4 Teoria Clássica de Campos	30
4.1 Grupos e Simetria	30
4.2 Grupo e algebra de Lie	31
4.3 Simetria e teorema de Noether	34
4.4 Simetria Abelian e o Campo de Higgs	36
4.5 Simetria Não-Abeliana e o Formalismo de Yang-Mills	39
5 Acoplamento com a Energia escura	42
6 Considerações finais	49
Referências Bibliográficas	51
A Derivação da Equação da Geodésica.	53
B Teorema de Noether.	55

C	Derivações das equações de Friedmann.	58
D	Modelo de Higgs	61

Capítulo 1

Introdução

O século XX foi um período de revoluções na cosmologia, marcado por descobertas que redefiniram nossa compreensão do universo. Desde a confirmação da expansão cósmica por Edwin Hubble, na década de 1920, até a detecção da radiação cósmica de fundo em micro-ondas (CMB) em 1965, cada avanço trouxe novos desafios e teorias audaciosas. Nas últimas décadas, duas das questões mais intrigantes emergiram: a natureza da energia escura, responsável pela aceleração da expansão do universo, e a possível existência das cordas cósmicas, estruturas teóricas que poderiam remontar aos primeiros instantes após o Big Bang.

Esta dissertação traça uma linha do tempo das principais descobertas cosmológicas do século XX, mostrando como elas pavimentaram o caminho para os atuais debates sobre energia escura e cordas cósmicas. Partindo da relatividade geral de Einstein e chegamos às observações de supernovas distantes que revelaram a aceleração cósmica no final dos anos 1990. Paralelamente, exploramos como as cordas cósmicas, propostas na década de 1970 como possíveis "defeitos topológicos" do universo primordial, permanecem uma fronteira entre a física teórica e a busca por evidências observacionais.

Ao relacionar esses desenvolvimentos, discutimos como a energia escura e as cordas cósmicas representam dois dos maiores enigmas da cosmologia contemporânea—um ligado ao destino do universo, outro às suas condições iniciais. Se confirmadas, as cordas cósmicas poderiam oferecer pistas sobre a unificação da física de partículas e a gravitação, enquanto a energia escura desafia nossos modelos padrão da cosmologia. Este trabalho não apenas revisita as conquistas do século passado, mas também reflete sobre como elas moldam as perguntas ainda sem resposta na busca pela compreensão definitiva do cosmos.

No capítulo 2 fazemos uma revisão da Teoria da Relatividade Geral, abordando, de maneira sucinta, os pontos mais importantes desta Teoria que serão utilizados nesta dissertação. Expondo sua motivação, Princípio da Equivalência, e construímos os objetos geométricos necessários para a definição de curvatura do espaço-tempo. Também construímos o tensor momento-energia do campo gravitacional e de um campo escalar. Finalmente desenvolvendo a equação de campo de Einstein [1, 2].

No capítulo 3, expomos os avanços que ocorreram em 1998, observações de supernovas do tipo Ia revelaram que a expansão do universo está se acelerando, uma descoberta surpreendente que implicou a existência de uma forma de energia repulsiva, denominada energia escura. Essa energia misteriosa, que compõe cerca de 68% do conteúdo energético do universo, permanece uma das maiores incógnitas da física moderna. Teorias como a das cordas cósmicas emergiram para explicar fenômenos do universo primitivo. As cordas cósmicas são hipotéticas falhas unidimensionais [3] que teriam se formado durante transições de fase no universo jovem, representando padrões de simetria quebrada. Embora ainda não observadas diretamente, essas estruturas poderiam ter influenciado a formação de galáxias e a distribuição da matéria no cosmos. A interseção entre a energia escura e as cordas cósmicas oferece um campo fértil para investigação. Algumas teorias sugerem que as cordas cósmicas poderiam interagir com a energia escura, afetando a dinâmica da expansão do universo. Explorar essa conexão pode proporcionar insights valiosos sobre a natureza fundamental do cosmos e os mecanismos que governam sua evolução.

No capítulo 4, descrevemos a teoria de grupos que fornece a base matemática para o entendimento de simetrias, pois formaliza operações que preservam propriedades invariantes de objetos ou leis físicas. Um grupo é definido por um conjunto G com uma operação interna que é associativa, possui elemento neutro e inversos, estabelecendo um quadro algébrico que captura transformações invariantes. Essa distinção revela diferentes estruturas de simetria: os grupos abelianos são conceitualmente mais simples, enquanto os não-abelianos conduzem a relações e dinâmicas mais complexas, essenciais em teorias de calibre e sistemas físicos interativos [4–6].

Grupos de Lie introduzem uma camada adicional: são grupos que também são variedades diferenciáveis, de forma que as operações de multiplicação e inversão são funções suaves. Eles permitem modelar simetrias contínuas — como rotações e transformações de isospin, integrando conceitos de cálculo diferencial e geometria ao estudo de grupos de simetria.

Associada a cada grupo de Lie há uma álgebra de Lie, formada pelo espaço tangente no elemento identidade do grupo e dotada do colchete de Lie $[\cdot, \cdot]$: uma operação bilinear, anticomutativa e que satisfaz a identidade de Jacobi. Essa álgebra captura a estrutura local do grupo, permitindo descrever geradores infinitesimais de simetria. A relação entre a álgebra e o grupo é formalizada pelo mapa exponencial, que liga elementos infinitesimais da álgebra a transformações no grupo, estabelecendo uma correspondência local-global entre esses dois objetos.

Já no capítulo 5, desenvolveremos as soluções afin de obter as equações campos que estejam relacionadas ao acoplamento em os setores escuros, gravitacional e o de corda cósmica. exploraremos soluções teóricas que permitam acoplar esses domínios, investigando como as cordas cósmicas—como objetos unidimensionais de densidade energética

extrema—podem influenciar a geometria do espaço-tempo e interagir com os componentes escuros do universo.

Para isso, partiremos de equações de campo modificadas, incorporando termos que descrevam não apenas a dinâmica gravitacional tradicional, mas também os efeitos da energia escura e as contribuições das cordas cósmicas. Buscaremos soluções que conectem:

O setor escuro (energia escura), cujas propriedades são inferidas indiretamente por seus efeitos cosmológicos;

O setor gravitacional, descrito pela relatividade geral;

O setor das cordas cósmicas, tratadas como defeitos topológicos ou como objetos fundamentais em teorias de campo unificado.

A abordagem adotada utiliza-se do método analítico, visando obter configurações de campo estáveis e consistentes com as observações cosmológicas atuais. Além disso, investigaremos como as cordas cósmicas poderiam modular a expansão acelerada do universo, seja através de seu acoplamento com a energia escura, seja como fontes primordiais de inhomogeneidades gravitacionais.

Ao final, esperamos contribuir para um modelo mais coerente da física dos setores escuros e das cordas cósmicas, avançando na direção de uma teoria unificada que reconcilie sua influência mútua na evolução do cosmos. Esta investigação não apenas aprofunda nossa compreensão teórica, mas também estabelece bases para futuras testagens observacionais. Assim, fechamos esta introdução com a perspectiva de que a síntese entre gravitação, campos escuros e cordas cósmicas pode revelar novos paradigmas sobre a estrutura e o destino do universo.

Capítulo 2

Relatividade Geral

A teoria da relatividade geral, formulada por Albert Einstein em 1915, constitui um dos alicerces da física moderna. Trata-se de uma reformulação profunda da teoria da gravitação, na qual a interação gravitacional não é mais descrita como uma força no sentido clássico, mas como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de matéria e energia.

A motivação principal para a relatividade geral surge da insuficiência da gravitação newtoniana em contextos de altas velocidades e campos gravitacionais intensos, bem como da incorporação dos princípios da relatividade restrita. O ponto de partida conceitual é o princípio da equivalência, que afirma a indistinguibilidade local entre os efeitos de um campo gravitacional e de um referencial acelerado. A partir desse princípio, deduz-se que a gravitação deve ser expressa por uma geometria curva do espaço-tempo.

A relação entre a curvatura do espaço-tempo e a distribuição de matéria e energia é expressa pelas equações de campo de Einstein, que ligam o tensor de curvatura Ricci e o escalar de curvatura ao tensor energia-momento. Essas equações são altamente não-lineares e permitem uma variedade de soluções com ricas interpretações físicas, desde buracos negros até modelos cosmológicos em expansão.

Ao longo desta seção, exploraremos os fundamentos matemáticos da relatividade geral, suas principais soluções, e os aspectos físicos e geométricos que a tornam uma teoria unificadora entre geometria e gravitação.

Faremos aqui um breve resumo e demonstrações das equações que foram responsáveis pelo nosso entendimento atual do universo curvo e do comportamento da matéria dentro deste. Adotaremos unidades naturais das grandezas relativísticas $C = 1$, $\beta = v < 1$ e $x^0 = t$.

2.1 Relatividade como geometria

No contexto da relatividade geral temos uma ferramenta fundamental para o seu desenvolvimento, a geometria diferencial. Se na descrição do espaço euclidiano temos

que a menor distancia entre dois pontos e uma reta perpendicular a eles, numa descrição não euclidiana, neste caso esferica, temos que a menor distancia entre dois pontos é uma curva geodesica, para o estudo de tal precisamos definir as suas gradezas e caracteristicas, usamos o espaço de Riemann para isso.

2.2 Derivadas covariantes.

A *derivada covariante*, denotada por ∇ , é uma generalização da derivada direcional para variedades curvas, permitindo medir a variação de campos vetoriais e tensoriais de forma coerente sob mudanças de coordenadas. Para um vetor contravariante V^i [7], a derivada covariante é dada por:

$$\nabla_j V^i = \partial_j V^i + \Gamma_{kj}^i V^k$$

e, para um covetor V_i , por:

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma_{ij}^k V_k$$

onde Γ_{jk}^i são os símbolos de Christoffel da conexão afinidade, que serão definido nas próximas secções.

As derivadas covariantes têm como propriedades principais as cinco listadas a baixo:

1. Linearidade:

$$\nabla_a (X^b + Y^b) = \nabla_a X^b + \nabla_a Y^b, \quad \nabla_a (c X^b) = c \nabla_a X^b$$

2. Regra do Produto (Leibniz):

$$\nabla_a (X^b Y^c) = (\nabla_a X^b) Y^c + X^b (\nabla_a Y^c)$$

3. Compatibilidade Métrica:

$$\nabla_a g_{bc} = 0$$

preservando produtos internos sob transporte paralelo.

4. Ação sobre escalares:

$$\nabla_a f = \partial_a f$$

para qualquer função escalar f .

5. Torção livre:

A conexão é dita *livre de torção* se, para quaisquer campos vetoriais X, Y ,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

onde $[X, Y]$ é o colchete de Lie.

Equivalentemente, define-se o **tensor de torção** T por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

A condição $T = 0$ caracteriza uma conexão sem torção.

Em uma base coordenada $\{\partial_i\}$, temos $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Então,

$$T^k{}_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji},$$

o que implica

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}.$$

Portanto, os símbolos de Christoffel são simétricos, definindo uma conexão simétrica (livre de torção).

Para um tensor $A^i{}_k$, a derivada covariante generaliza-se como:

$$\nabla_l A^i{}_k = \partial_l A^i{}_k + \Gamma^i_{ml} A^m{}_k - \Gamma^m_{kl} A^i{}_m$$

2.3 Transporte paralelo e Conexões.

O transporte paralelo descreve como um vetor (por exemplo, o deslocamento ou velocidade) é movido ao longo de uma curva, mantendo-se “paralelo a si mesmo” de acordo com a conexão afim, que são conexões que preservam o paralelismo de forma consistente ao se movimentar sobre a superfície de uma esfera, por exemplo.

A conexão apropriada é a conexão de Levi-Civita, que é a conexão que não altera a métrica do vetor quando transportado sobre a superfície curva, definida a partir dos símbolos de Christoffel [1]. A conexão de Levi-Civita, definida pelas condições:

$$\nabla_a g_{bc} = 0, \quad \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$$

impõe que:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\ell} (\partial_j g_{\ell k} + \partial_k g_{\ell j} - \partial_\ell g_{jk})$$

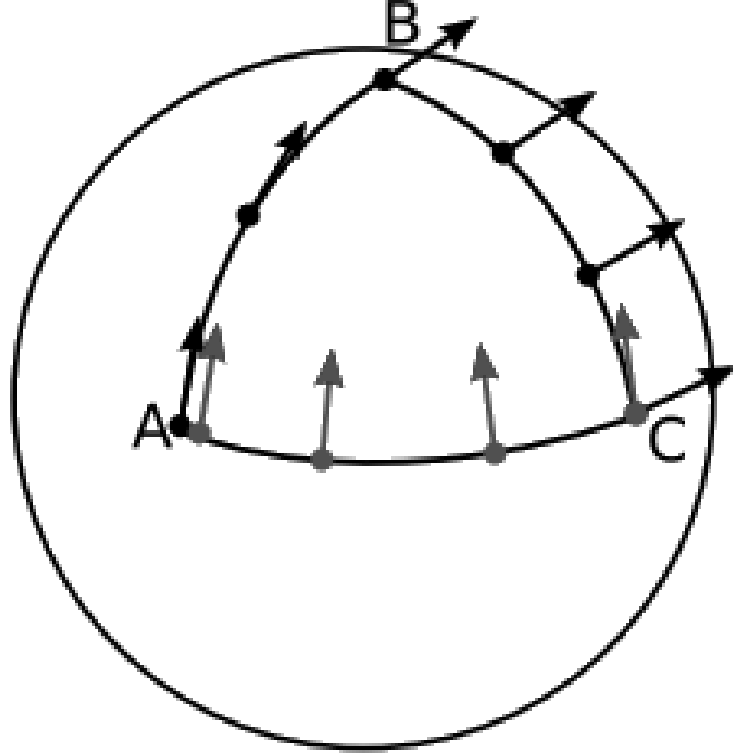


Figura 2.1: transporte paralelo.

Fonte: Wikipédia.

Esse termo garante que ∇ preserve a classificação tensorial dos objetos. Os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ são coeficientes de conexão que descrevem como os vetores mudam ao serem transportados paralelamente em um espaço curvado. Eles podem ser derivados a partir da métrica $g_{\mu\nu}$ usando o seguinte procedimento:

Usando o requisito de Compatibilidade Métrica, assumimos que a derivada covariante da métrica se anula (que é a condição de compatibilidade métrica):

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1)$$

Esta condição garante que o produto interno entre vetores seja preservado durante o transporte paralelo.

podemos obter essa expressão em termos de derivadas parciais e expandir a derivada covariante:

$$\partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\sigma} g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} g_{\mu\sigma} = 0 \quad (2.2)$$

aplicando a permutações cíclicas e escrevemos três versões cíclicas desta equação:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma_{\rho\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} \quad (1) \quad (2.3)$$

$$\partial_\mu g_{\nu\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma g_{\nu\sigma} \quad (2) \quad (2.4)$$

$$\partial_\nu g_{\rho\mu} = \Gamma_{\nu\rho}^\sigma g_{\sigma\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma g_{\rho\sigma} \quad (3) \quad (2.5)$$

fazendo a combinação linear onde somamos (2) + (3) - (1) e usamos a simetria $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$:

$$\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} = 2g_{\sigma\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \quad (2.6)$$

Isolando os Símbolos de Christoffel, Multiplicando ambos os lados por $g^{\lambda\rho}$ e usando $g^{\lambda\rho}g_{\sigma\rho} = \delta_\sigma^\lambda$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.7)$$

Esta é a expressão final para os símbolos de Christoffel de segunda espécie em termos da métrica e suas derivadas, que tem como propriedades importantes

- Simetria: $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$
- Dependem apenas da métrica e suas primeiras derivadas
- Não são componentes de um tensor (não se transformam como tensores sob mudanças de coordenadas),

que descreve uma partícula que se move no espaço-tempo curvo sem a ação de forças externas, o que implica dizer que as soluções desta EDO fornecem a geodésica para uma superfície do espaço de Riemann.

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu V^\mu = 0 \quad (2.8)$$

Que equivale a:

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} V^\beta = 0 \quad (2.9)$$

A equação geodésica (vetor tangente $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$):

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad (2.10)$$

2.4 Geodésica

Uma *curva paramétrica* em $\mathbb{R}^n$ é definida por uma função suave

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \alpha(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)),$$

em que $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo real. Essa representação permite descrever trajetórias no espaço de forma contínua e diferenciável.

Para cada parâmetro t , a velocidade ou vetor tangente à curva em $\alpha(t)$ é dado por

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right).$$

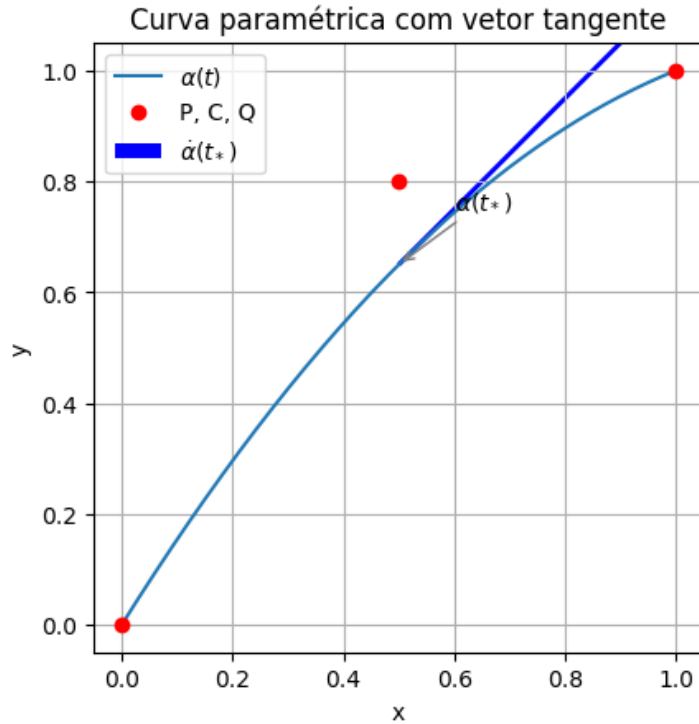


Figura 2.2: Curva parametrizada.

Fonte: O autor.

Esse vetor tangente indica a direção e o ritmo com que a curva evolui em cada ponto, sendo essencial para cálculos de comprimento, aceleração e curvatura.

Em contextos geométricos, especialmente em superfícies curvas como a esfera, interessa-nos encontrar curvas que minimizem uma distância entre dois pontos. Essas são as chamadas geodésicas, generalizações do conceito de “reta” em espaço curvo. Matematicamente, uma geodésica é uma curva paramétrica cujos vetores tangentes são transportados paralelamente ao longo da própria curva — resultando na menor distância (ou

caminho estacionário) entre os pontos conectados, assim podemos usar o princípio de mínima ação para encontrar esse caminho sobre a curva.

$$L = \int_a^b ds^2 \quad (2.11)$$

onde ds é uma curva parametrizada. A distância infinitesimal percorrida ao longo da curva é dada pelo elemento de linha:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.12)$$

Onde $g_{\mu\nu}$ são os coeficientes métricos que nos dá uma matriz de n^2 elementos, que se transformam como tensores de rank 2, o **tensor métrico**.

podemos ainda usar a métrica do espaço e definir

$$L = \int_a^b g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} dt \quad (2.13)$$

Podemos usar o símbolo de Christoffel para reescrever e assim chegar a:

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{ij}^\mu \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = \frac{d(\ln F)}{dt} \frac{dx^\mu}{dt} \quad (2.14)$$

onde

$$\Gamma_{ij}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\ell} (\partial_j g_{\ell i} + \partial_i g_{\ell j} - \partial_\ell g_{ij})$$

conforme [8]. O desenvolvimento da equação (2.14) está no apêndice A.

2.5 Tensor de curvatura de Riemann

O tensor de curvatura de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ é definido em termos da não-comutatividade das derivadas covariantes ao longo de duas direções. Partimos da definição da derivada covariante para um vetor V^ρ :

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda \quad (2.15)$$

Aplicando uma segunda derivada covariante:

$$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho = \partial_\nu (\nabla_\mu V^\rho) + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \nabla_\mu V^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \nabla_\sigma V^\rho \quad (2.16)$$

Calculando o comutador $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho$, obtemos:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda) V^\sigma - (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma) \nabla_\sigma V^\rho \quad (2.17)$$

Assumindo uma conexão simétrica (torsão nula), $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma$, o último termo desaparece. Definimos então o tensor de Riemann como:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (2.18)$$

Este tensor possui as seguintes propriedades notáveis:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = -R_{\sigma\nu\mu}^\rho \quad (\text{Antissimetria nos últimos índices}) \quad (2.19)$$

$$R_{[\sigma\mu\nu]}^\rho = 0 \quad (\text{Identidade de Bianchi algébrica}) \quad (2.20)$$

$$\nabla_{[\lambda} R_{|\sigma|\mu\nu]}^\rho = 0 \quad (\text{Identidade de Bianchi diferencial}) \quad (2.21)$$

Em termos da métrica $g_{\mu\nu}$, os símbolos de Christoffel são:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.22)$$

A forma completamente covariante do tensor é obtida contraindo com a métrica:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R_{\sigma\mu\nu}^\lambda \quad (2.23)$$

O tensor de curvatura de Riemann é o objeto matemático fundamental que descreve de forma intrínseca a curvatura de uma variedade

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (2.24)$$

esse tensor pode ser reduzido ao escalar de curvatura ou escalar de Ricci, usando o tensor métrico e fazendo uso da contração de tensor,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (2.26)$$

Combinar estas duas expressões gera:

$$R = g^{\mu\nu} R^\lambda_{\mu\lambda\nu}.$$

$$R = g^{\mu\nu} (\partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) \quad (2.27)$$

2.6 Princípio Variacional Relativístico

Analogamente ao que foi feito por Euler e lagrange e que é de suma importância para a descrição de um sistema na mecânica clássica, o princípio variacional na relatividade tem como efeito a descrição da mínima ação no contexto de um universo curvo que interage com a matéria.

Na lagrangiana temos as informações correspondentes a energia cinética e potencial do sistema em análise, buscamos encontrar um variação do sistema que mantenham a invariancia do sistema, preservando assim as características dele. Para o caso específico de um sistema relativistico, a característica a ser preservada é a invariância de lorentz

onde

$$S(x^\mu(\tau)) = \int_a^b d\tau \mathcal{L}(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d(\tau)}) \quad (2.28)$$

é a ação do sistema físico que sobre a trajetória seja um extremo, com isso $\delta S = 0$. A variação da ação sobre a trajetória é definida como

$$\delta S = S(x^\mu + \delta x^\mu) - (Sx^\mu) \quad (2.29)$$

que leva a

$$\delta S(x^\mu(\tau)) = \int_a^b d\tau \mathcal{L}((x^\mu + \delta x^\mu), \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{d(\tau)}) - \int_a^b d\tau \mathcal{L}(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d(\tau)}) \quad (2.30)$$

fazendo uma expansão em série de Taylor

$$\mathcal{L}(x^\mu, \delta x^\mu, \frac{dx^\mu}{d(\tau)}, \delta(\frac{dx^\mu}{d(\tau)})) = \mathcal{L}(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d(\tau)}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{dx^\mu}{d\tau})} \delta(\frac{dx^\mu}{d(\tau)}) \quad (2.31)$$

Substituindo esse resultado na equação da variação e subtraindo os termos repetidos chegamos a:

$$\delta S = \int_a^b d\tau (\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{dx^\mu}{d\tau})} \frac{d}{dt} \delta x^\mu) \quad (2.32)$$

no ultimo termo temos a troca da ordem da derivada com a variação isso porque a derivada é intercambiavel com a variação.

$$\delta(\frac{dx^\mu}{d(\tau)}) \equiv \frac{d(x^\mu + \delta x^\mu)}{d(\tau)} - \frac{dx^\mu}{d(\tau)} = \frac{d}{d\tau}(x^\mu + \delta x^\mu - x^\mu) = \frac{d}{d\tau}(\delta x^\mu) \quad (2.33)$$

Integrando por partes a equação (34) a variação produz

$$\delta S = \int_a^b d\tau \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \frac{d}{d\tau} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)} \right) \quad (2.34)$$

usando o fato de que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)}$ não contribui, pois as variações da linha do universo nos pontos A e B se anulam, com isso $\delta x^\mu(A) = \delta x^\mu(B) = 0$, para variações arbitrárias de x^μ a condição para que a ação seja estacionária é:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dx^\mu}{d\tau}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.35)$$

Que é a equação de Euler-Lagrange para a linha do universo.

Para descrever o caso relativístico usamos a ação de Einstein-Hilbert com termo de matéria. A ação de Einstein-Hilbert com matéria é dada por:

$$S[g] = \frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x \quad (2.36)$$

Aplicando o princípio de ação estacionária:

$$\delta S = 0 \quad (2.37)$$

Calculando a variação:

$$\delta S = \int \left[\frac{1}{2\kappa} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (2.38)$$

Usando as identidades padrão: - variação do determinante métrico: $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, - definição do tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}},$$

obtemos:

$$\int \left[\frac{1}{2\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (2.39)$$

Como $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrária, o integrando deve se anular, resultando nas equações de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.40)$$

com $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Essas são as equações de campo de Einstein.

O desenvolvimento das equações desta secção se entra no apêndice B.

2.7 Equação de Campo

A equação de campo para o movimento que ocorre numa geodesica é definido por uma equação de descreve como a matéria informa ao espaço sua deformação.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (2.41)$$

usando o tensor de Einsteins $G_{\mu\nu}$ a equação de campo pode ser resumida a

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (2.42)$$

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein;

$g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico;

$T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da matéria.

É possível a obtenção desta equação usando uma variação relativística da lei clássica da gravidade $\Delta^2 U = 4\pi\epsilon$, onde U seria o potencial gravitacional gerado pela fonte de massa, conforme [2]

Capítulo 3

Modelo Cosmologico Padrão

3.1 Breve Histórico da Cosmologia

A cosmologia moderna começou a tomar forma logo após a formulação da Teoria da Relatividade Geral por Einstein em 1915, que transformou radicalmente a maneira de entender a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo. Apenas dois anos depois, Vesto Slipher, observando galáxias descobriu que seus deslocamentos para o vermelho, fosse uma evidência de que essas estruturas se afastavam da Terra.

Em 1922, o matemático russo Alexander Friedmann derivou das equações de Einstein soluções que permitiam um universo dinâmico, que se encontra ora em expansão, ora em contração, desta forma abandonando definitivamente o modelo estático dominante da época. As soluções de Friedmann abriram caminho para modelos em que o universo muda ao longo do tempo, em contraste com as visões fixas propostas por Einstein.

Em 1927, o físico e sacerdote belga Georges Lemaître publicou um artigo onde demonstrava teoricamente que as soluções de Friedmann implicavam um universo em expansão. Ele derivou a relação linear entre velocidade de recessão e distância, a lei que hoje reconhecemos como Lei de Hubble, e chegou a estimar numericamente a constante de expansão, utilizando dados de Slipher e Strömberg. Apesar de publicada em uma revista pouco circulada, essa descoberta antecedeu em dois anos o trabalho observacional de Hubble.

Quando Edwin Hubble publicou em 1929 que nebulosas distantes se afastavam com velocidade proporcional à distância ($v = H_0 D$), forneceu a primeira confirmação empírica sólida da expansão do universo, consolidando observacionalmente a relação sugerida por Lemaître.

No modelo padrão da Física temos que o universo começa em uma expansão, esse modelo foi desenvolvido por diversos cientista no início do século XX e ficou conhecido por Big Bang. Neste, o universo era inicialmente denso e quente hoje especula-se que o universo primordial teve várias fases que se diferenciavam por mudanças nas características e grandezas que constituíam-o tais como temperatura, densidade, formação de matéria

barionica, etc. Através dessas variações podemos calcular por estimativa a idade do universo a exemplo, hoje em 18.3 bilhões de anos.

A cosmologia atual é baseada em observações, logo uma ciência observacional, tendo como parâmetros basilares a observação da radiação de fundo em micro-ondas, que nos dá a estimativa que a temperatura do universo atual é de cerca de 2,76 K [9]. E o afastamento das galáxias, o que foi observado por E. Hubble em 1929, que nos leva ao desvio para o vermelho, redshift, esse nos dá um parâmetro de quanto as galáxias se afastam umas das outras, esse fenômeno acaba por produzir um efeito sobre a luz emitada por essas fontes luminosas que faz com que ela tenha uma diminuição na sua energia e vá para a frequência de onda da luz vermelha.

O modelo cosmológico padrão, fundamentado na teoria da relatividade geral de Einstein, fornece a estrutura teórica para compreendermos a evolução do universo em grande escala. Este modelo baseia-se no princípio cosmológico, que assume homogeneidade e isotropia (o universo apresenta as mesmas características em cada ponto e em qualquer direção, respectivamente) do universo em escalas suficientemente grandes, acima de 30 Mpc, uma vez que quando observado entre 10 e 30 Mpc o universo não se é nem homogêneo nem isotrópico, e é descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). A dinâmica da expansão cósmica é governada pelas equações de Friedmann, que derivam diretamente das equações de campo de Einstein quando aplicadas a um universo homogêneo e isotrópico [10].

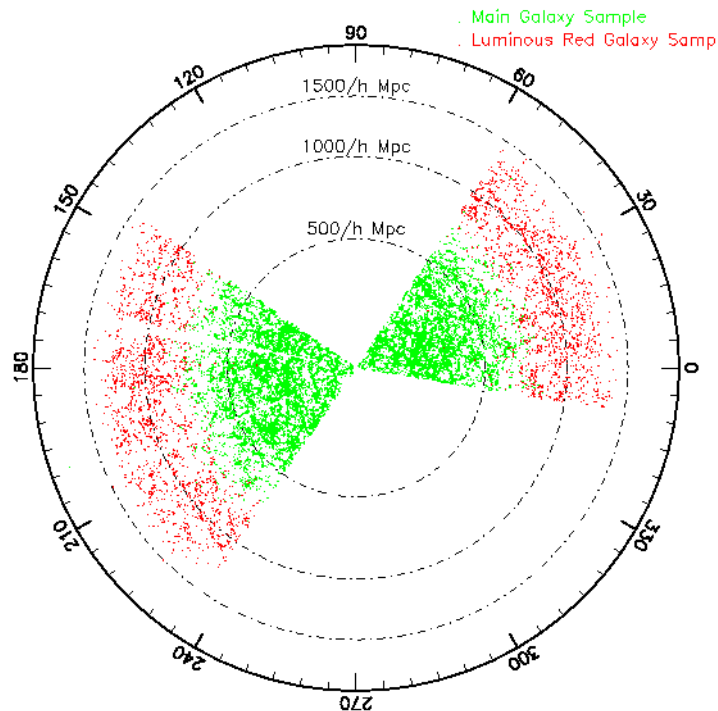


Figura 3.1: Distribuição de galáxias por Mpc.

Fonte: SOUSA, R. E. d. Introdução à Cosmologia. [S.l.]: EDUSP, 2019.

As equações de Friedmann relacionam o fator de escala $a(t)$, que descreve a expansão do universo, com o conteúdo material e energético do cosmos. A primeira equação de Friedmann é dada por, ver apêndice C:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (3.1)$$

onde H representa o parâmetro de Hubble que quantifica a taxa de expansão do universo, ρ é a densidade total de energia, k descreve a curvatura espacial (assumindo valores -1, 0 ou +1 para geometrias hiperbólica, plana e esférica, respectivamente), e c é a velocidade da luz.

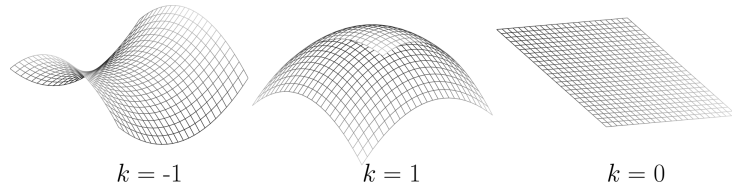


Figura 3.2: Possíveis representações para os diferentes valores de k .

Fonte: Imagem gerada por inteligência artificial (DALL·E, OpenAI, 2025) .

A segunda equação de Friedmann, frequentemente chamada de equação da aceleração, descreve como a expansão do universo acelera ou desacelera, ver apêndice C:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \quad (3.2)$$

onde p representa a pressão do conteúdo cósmico.

A geometria do espaço-tempo é descrita pelo tensor de Riemann $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$, enquanto o tensor de Einstein é construído como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

e aparece nas equações de campo originais de Einstein. Este tensor relaciona-se com o tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

que descreve a distribuição de matéria e energia no espaço-tempo.

O modelo cosmológico padrão classifica o conteúdo do universo em três componentes principais: matéria (com $p \approx 0$), radiação (com $p = \rho c^2/3$) e energia escura. Este arcabouço teórico permite descrever a evolução do universo desde os primeiros instantes após o Big Bang até a aceleração da expansão cósmica observada atualmente, embora importantes questões sobre a natureza da matéria escura permaneçam em aberto.

Durante seu processo de expansão o universo teve a redução de sua temperatura, como dito acima é um dos parâmetros para a definição de fases do universo, sendo assim, ao passar de uma fase a outra por resfriamento, o universo possivelmente teve a criação de objetos que surgem da quebra espontânea de simetria.

Com o cair da temperatura do universo abaixo de uma temperatura crítica T_c temos uma quebra de simetria e portanto o surgimento de um defeito topológico, que entre vários casos pode gerar uma corda cósmica, ou seja a corda é um tipo de defeito que surge quando a simetria é quebrada e faz com que tenhamos um efeito de corda cósmica que gera um campo, esse campo é conhecido como o campo de Higgs.

3.2 Corda Cósmicas

Uma *corda cósmica* é um defeito topológico unidimensional que pode surgir durante quebras de simetria no início do Universo. Essas estruturas possuem diâmetro pequeno (ordem atômica) e energia por unidade de comprimento extremamente elevada μ . O potencial do chapéu mexicano é amplamente utilizado em física para ilustrar a quebra espontânea de simetria, especialmente no mecanismo de Higgs.

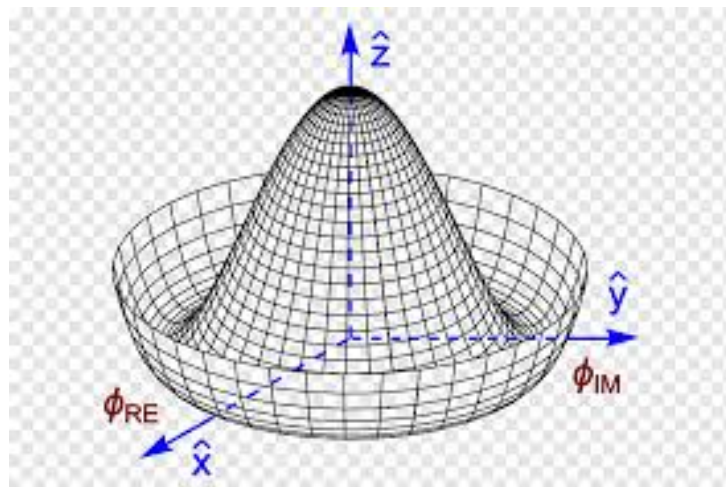


Figura 3.3: Potencial do tipo chapéu mexicano.

Fonte: Wikipédia.

As cordas cósmicas são soluções válidas das equações de Einstein na relatividade geral, representando defeitos topológicos unidimensionais no espaço-tempo. Essas soluções descrevem objetos extremamente finos, mas com alta densidade de energia, que causam uma deformação característica no espaço ao seu redor.

Uma corda cósmica reta e infinita pode ser modelada por uma métrica com simetria cilíndrica. A solução mais simples, proposta por Vilenkin, assume que o tensor energia-momento tem apenas componentes não nulas em T_{tt} e T_{zz} , correspondentes à densidade de energia e tensão ao longo da corda. A métrica resultante é localmente plana,

mas com um déficit angular:

$$ds^2 = dt^2 + dr^2 + (1 - 4G\mu)^2 r^2 d\phi^2 + dz^2 \quad (3.5)$$

Aqui, G é a constante gravitacional e μ é a densidade linear de energia da corda. Esse déficit angular implica que, ao redor da corda, o espaço-tempo é conicamente deformado: um círculo completo ao redor da corda tem um ângulo total menor que 2π . Essa deformação é uma assinatura gravitacional única das cordas cósmicas.

Nas Soluções acopladas com campos de matéria onde os modelos mais realistas consideram cordas cósmicas formadas por campos de Higgs e gauge, como no modelo Abelian de Higgs. Nesses casos, as equações de Einstein são acopladas às equações de campo da matéria, resultando em soluções mais complexas. Estudos demonstraram a existência de soluções estáticas do tipo corda para essas equações acopladas, validando a consistência dessas configurações dentro da relatividade geral, aqui trataremos dos modelos não-abeliano para a corda cosmica.

Embora ainda não confirmadas, as cordas cósmicas seguem sendo uma hipótese fascinante para explicar aspectos da formação precoce do universo — especialmente na formação rápida de grandes estruturas e na emissão de ondas gravitacionais características. Avanços em observação (CMB, ondas gravitacionais, mapas de galáxias e JWST) têm ampliado a testabilidade dessas teorias, e futuras descobertas podem posicionar as cordas cósmicas como chave para compreender transições de fase iniciais, evolução da matéria e física fundamental.

Capítulo 4

Teoria Clássica de Campos

4.1 Grupos e Simetria

Em todas as áreas da física, a simetria desempenha um papel fundamental, sendo responsável pela conservação de quantidades físicas (como energia, momento, carga elétrica), pela classificação de partículas e interações (via grupos de simetria e álgebra de Lie), e por oferecer poderosas restrições teóricas que guiam a formulação de leis fundamentais e modelos efetivos — do eletromagnetismo à cosmologia e física de partículas.

Nos estudos de teoria de grupos, o grupo de simetria é o grupo de todas as transformações sob as quais um objeto é invariável e onde temos a operação de composição. Essa transformação “move” o objeto, mas preserva toda a sua estrutura relevante. podemos fazer uma caracterização para uma notação que é frequente para o grupo de simetria onde temos um objeto X que pertence a um conjunto G , esse objeto pode ser representado por $G(x)$. Para a simetria de objetos físicos, consideramos sua composição física como parte do modelo. (Um modelo ou padrão pode ser especificado formalmente, por exemplo, como um campo escalar, como um campo vetorial ou como uma função mais geral no objeto.). O grupo de simetria $G(X)$ consiste nas isometrias que mapeiam X . Dizemos que X é invariante sob esse mapeamento, e o mapeamento é uma simetria de X , [5].

Um ponto importante sobre as propriedades de um grupo Lie é que, se houver comutação entre os elementos do grupo, ou seja, se $a \cdot b = b \cdot a$ temos que o grupo é dito **Abeliano**, isso implica uma simetria pois há invariância, pois o gerador do grupo é a identidade.

$$a \cdot b = b \cdot a \implies [a, b] = 0$$

Vamos introduzir o conceito de representação, que é usado para definir os elementos de um grupo e pode ser estendido para o de transformações. Usando as propriedades de grupo, podemos reescrevê-las com a representação onde a , b e c são elementos do grupo e D é

uma matriz, então

$$\begin{aligned} a &\Longleftrightarrow D(a), \\ b &\Longleftrightarrow D(b), \\ c &\Longleftrightarrow D(c). \end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que uma representação é equivalente a outra se temos D e D' relacionadas através de:

$$D'(n) = UD(n)U^{-1} \quad (4.1)$$

onde $UU^{-1} = \mathbb{I}$

4.2 Grupo e algebra de Lie

Definição: Um grupo de Lie é simultaneamente um grupo (estrutura algébrica) e uma variedade diferenciável, pois seus elementos variam continuamente em um intervalo finito [11].

Partindo do conceito geral de uma representação matricial com um operador U que atua linearmente sobre o espaço vetorial

$$U(\alpha_1 X + \alpha_2 Y) = \alpha_1 UX + \alpha_2 UY \quad (4.2)$$

onde α_1 e α_2 são constante reais ou complexas.

Assim a transformação segue como:

$$X' = UX \quad (4.3)$$

uma propriedade da álgebra linear que devemos ressaltar diz que respeito ao determinante, se o $\det U \neq 0$ a matriz possui inversa e isso nos permite formar um grupo. Para um espaço com n dimeções temos que se complexo, é caracterizado por $2n^2$ parâmetros e, se real possui n^2 parâmetros, com denominações Grupo linear geral, respectivamente $GL(n, \mathbb{C})$ e $GL(n, \mathbb{R})$

Dentro desses grupos podemos modelá-los a fim de produzir variações, temos, um caso específico de interesse que são os **grupos unitários** que tem como característica manter invariante a quantidade $\mu_i^* \mu_i$, desta forma podemos escrever:

$$\mu_i'^* \mu_i' = U_{ij}^* U_{ik} \mu_j^* \mu_k \quad (4.4)$$

o que só é valido se produz δ_{jk} , e implicar em dizer que $U^\dagger U = \mathbb{I}$, pois

$$\begin{aligned}
 U &\in \text{GL}(n, \mathbb{C}) \mid U^\dagger U = I_n, \det U = 1 \\
 &\implies \det(U^\dagger U) = \det(U^\dagger) \det(U) \\
 &= (\det(U))^* \det(U) = |\det(U)|^2.
 \end{aligned}$$

e podemos concluir que

$$\det U = \exp[i\theta] \quad (4.5)$$

com a operação de grupo dada pela multiplicação de matrizes.

Para esborçar a álgebra de Lie, escrevendo os elementos do grupo de Lie

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \exp(i\alpha_a X^a) \quad (4.6)$$

onde X^a são os geradores do grupo. Se consideramos dois elementos

$$A_1 = \exp(i\alpha_1 X^1) \quad (4.7)$$

$$A_2 = \exp(i\alpha_2 X^2) \quad (4.8)$$

e introduzindo um elemento P que representa o produto de cada um dos elementos e seus inversos

$$P = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}$$

Expandindo

$$A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\alpha_a X^a) \quad (4.9)$$

obtemos que $P = 1 - \alpha_1 \alpha_2 [X^1, X^2]$ e termos de ordem α^3

$$P = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1} = \exp(i\alpha_1 X^1) \exp(i\alpha_2 X^2) \exp(-i\alpha_1 X^1) \exp(-i\alpha_2 X^2)$$

Pela fórmula BCH para pequenos α , temos:

$$\exp(X) \exp(Y) = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots\right)$$

Aplicando para P , obtemos até $\mathcal{O}(\alpha^3)$:

$$P = \exp\left(-\alpha_1 \alpha_2 [X^1, X^2] + \frac{i}{2} \alpha_1^2 \alpha_2 [X^1, [X^1, X^2]] + \frac{i}{2} \alpha_1 \alpha_2^2 [X^2, [X^1, X^2]] + \mathcal{O}(\alpha^4)\right)$$

Como $\exp(Z) = 1 + Z + \frac{1}{2}Z^2 + \dots$, podemos escrever:

$$P = 1 - \alpha_1 \alpha_2 [X^1, X^2] + \frac{i}{2} \alpha_1^2 \alpha_2 [X^1, [X^1, X^2]] + \frac{i}{2} \alpha_1 \alpha_2^2 [X^2, [X^1, X^2]] + \mathcal{O}(\alpha^4)$$

Observe que: - O termo linear em α cancela devido à composição. - O primeiro termo não trivial surge em $\mathcal{O}(\alpha^2)$. - Os termos cúbicos envolvem comutadores aninhados $[X^1, [X^1, X^2]]$ e $[X^2, [X^1, X^2]]$, provenientes da parte cúbica da expansão BCH. - Termos de ordem maior aparecem em $\mathcal{O}(\alpha^4)$ e além.

onde o termo $[X_1, X_2]$ é o comutador dos geradores do grupo.

De acordo com as propriedades de grupo P é um elemento e pode ser definido como

$$\begin{aligned} P &= 1 - \alpha_1 \alpha_2 [X^1, X^2] \\ &= 1 + i \alpha_a X^a \end{aligned} \quad (4.10)$$

o que leva a

$$[X_1, X_2] = -i \frac{\alpha_a}{\alpha_1 \alpha_2} X_a \quad (4.11)$$

generalizando podemos reescrever a equação acima e assim suas propriedades

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c \quad (4.12)$$

É essa última equação que caracteriza a álgebra do grupo de Lie. f_{abc} é a constante de grupo e tem as seguintes propriedades:

- $f_{abc} = -f_{bac}$
- $f_{bcd}f_{ade} + f_{abd}f_{cde} + f_{cad}f_{bde} = 0$

onde essa última vem direto a identidade de Jacobi.

Assim, satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) Bilinearidade: $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z],$
 $[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y],$
- (2) Antissimetria: $[x, y] = -[y, x],$
- (3) Identidade de Jacobi: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$

definindo as constantes de estrutura f^{abc} . Pelo caráter antissimétrico do colchete, temos:

$$[X^a, X^b] = -[X^b, X^a] \implies f^{abc} = -f^{bac}.$$

Logo, as constantes são *antissimétricas* nos dois primeiros índices.

Em representações matriciais como a adjunta, normaliza-se com:

$$\text{Tr}(X_a X_b) = k \delta^{ab},$$

sendo k uma constante, Pode-se mostrar que f_{abc} é *totalmente antissimétrico* em (a, b, c)

$$f_{abc} = \frac{-i}{k} \text{Tr}([X_a X_b] X_c) \quad (4.13)$$

que é totalmente antissimétrica.

4.3 Simetria e teorema de Noether

O Teorema de Noether, formulado por Emmy Noether em 1918, é um dos pilares fundamentais da teoria de campos. Ele estabelece uma conexão profunda entre simetrias e leis de conservação, revelando que cada simetria contínua de uma ação física está associada a uma quantidade conservada. Se a lagrangiana for invariante sob uma transformação contínua dos campos (ou das coordenadas), então existe uma grandeza conservada j^μ associada a essa simetria. Isso significa que:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.14)$$

Essa equação representa a conservação local da quantidade associada, a exemplo de energia, momento linear e/ou angular, carga elétrica, etc.

Seja $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, x^\mu)$ a densidade lagrangiana de uma teoria de campos que depende de campos $\phi_i(x)$ com índices i . Se o sistema possui uma simetria contínua com uma transformação infinitesimal, tal qual

$$\phi_i(x) \rightarrow \phi_i(x) + \delta\phi_i(x) \quad \text{com} \quad \delta\phi_i = \alpha \Psi_i(x)$$

é uma simetria se

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \Lambda^\mu \implies \delta S = \int d^4x \partial_\mu \Lambda^\mu = 0.$$

Considere a variação da lagrangiana sob uma transformação infinitesimal dos campos:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi)$$

Utilizando que $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$, temos:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\mu(\delta\phi)$$

Aplicando a identidade do produto:

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right)$$

Se as equações de movimento de Euler-Lagrange são satisfeitas, o termo entre colchetes se anula. Portanto, a variação da lagrangiana se reduz a um divergente total:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right)$$

Agora, se a lagrangiana for invariante sob a transformação, então $\delta\mathcal{L} = 0$ (ou, mais precisamente, um divergente total que não altera a ação). Isso nos leva à conservação da corrente:

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

Esta é a corrente de Noether associada à simetria contínua da ação.

Aplicando variação da lagrangiana e usando as equações de Euler-Lagrange:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \partial_\mu(\delta\phi_i) = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i - \Lambda^\mu \right],$$

define-se a corrente:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \delta\phi_i - \Lambda^\mu,$$

que satisfaz:

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

A carga associada é:

$$Q = \int d^3x J^0(x), \quad \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Exemplo: campo escalar complexo e simetria $U(1)$

Com densidade:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi - V(\phi^*\phi),$$

sob transformação $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$, temos:

$$\delta\phi = i\alpha\phi, \quad \Lambda^\mu = 0, \quad J^\mu = i(\phi^* \partial^\mu\phi - \phi \partial^\mu\phi^*),$$

e isso satisfaz $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Toda simetria contínua do lagrangiano em teoria de campos gera uma corrente conservada J^μ e essa corrente satisfaz $\partial_\mu J^\mu = 0$ e dá origem a uma carga constante no tempo.

Assim, o Teorema de Noether é uma ponte elegante entre a simetria matemática e as leis físicas, revelando a estrutura profunda que rege o comportamento dos campos fundamentais.

4.4 Simetria Abeliana e o Campo de Higgs

Nesta secção faremos uma breve introdução e revisão aos temas de Simetria Abeliana e o Campo de Higgs.

Durante os primeiros instantes após o Big Bang, o universo passou por uma transição de fase associada ao campo de Higgs. Inicialmente, o campo estava em um estado simétrico de alta energia. À medida que o universo esfriava, o campo de Higgs adquiriu um estado de vácuo diferente de zero, quebrando espontaneamente a simetria de fase global e conferindo massa às partículas fundamentais.

Essa transição de fase é análoga à transição de uma substância de um estado líquido para sólido, onde a simetria do sistema é reduzida e novas propriedades emergem.

Durante seu processo de expansão o universo teve a redução de sua temperatura, como dito em secções anteriores, é um dos parametros para a definição de fases do universo. Sendo assim, ao passar de uma fases a outra por resfriamento, o universo possivelmente teve a criação de objetos que sugem da quebra espontânea de simetria.

A densidade de Lagrangiano que representa o sistema é:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \lambda (|\phi|^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu.$$

Quando promovemos uma simetria de fase global a simetria local (gauge), surge o campo gauge A_μ , e consequentemente, o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, pois o tensor eletromagnético é a parte cinética do campo de gauge. O tensor eletromagnético é definido como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta, \quad \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0$$

O tensor de energia-momento do campo eletromagnético é dado por:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

Esse tensor é simétrico $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, traço nulo $T^\alpha{}_\alpha = 0$, e codifica densidades de energia, fluxo de momento e o vetor de Poynting através de seus componentes.

Sob uma transformação de gauge local $U(1)$, os campos se transformam como:

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x).$$

Onde a dependência de $\alpha(x)$, que é uma dependência local, traz a necessidade de termos uma nova forma de invariância para os termos do lagrangiano.

Invariância da Derivada Covariante

O tensor $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ é invariante sob $A_\mu \Rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$, já que os termos extras se cancelam via comutação de derivadas parciais.

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi.$$

Sob transformação de gauge local:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)} \phi, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x).$$

Logo, para a derivada covariante transformada:

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi' &= (\partial_\mu + ieA'_\mu) (e^{i\alpha(x)} \phi) \\ &= e^{i\alpha(x)} [\partial_\mu + i(\partial_\mu \alpha) + ieA_\mu + i\partial_\mu \alpha] \phi \\ &= e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi \\ &= e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi. \end{aligned}$$

Ou seja, o fator de fase $e^{i\alpha(x)}$ fatoriza completamente para fora — isto é o que chamamos de covariância de gauge.

Como consequência, ao tomar o módulo quadrado:

$$|D'_\mu \phi'|^2 = |e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi|^2 = |D_\mu \phi|^2,$$

$$D'_\mu \phi' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi \quad \Rightarrow \quad |D'_\mu \phi'|^2 = |D_\mu \phi|^2.$$

confirmando que o termo cinético permanece invariante sob a transformação local.

Quebra Espontânea de Simetria

No caso do campo de Higgs, o potencial associado possui a forma de "chapéu mexicano", com um mínimo de energia não no ponto $\phi = 0$, mas em um círculo de valores com $|\phi| = v$, onde v é o valor de expectativa de vácuo (VEV). Ao escolher um estado de vácuo específico dentro desse conjunto de mínimos, a simetria de fase global é quebrada espontaneamente, pois o estado escolhido não é invariante sob a transformação de fase global, embora as equações fundamentais o sejam. No vácuo $\langle \phi \rangle = \eta$:

Essa degenerescência de fase global é análoga à simetria de fase global quebrada espontaneamente no campo de Higgs — porém, aqui temos também simetria local abeliana.

Escolhendo um vácuo com $\langle \phi \rangle = \eta$, podemos parametrizar:

$$\phi(x) = \left(\eta + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \right) \exp\left(i \frac{\theta(x)}{\eta} \right).$$

Em gauge unitário ($\theta(x) = 0$), elimina-se explicitamente o grau de liberdade da fase (o bóson de Goldstone), e o campo de gauge adquire um termo de massa:

$$\mathcal{L} \supset e^2 \eta^2 A_\mu A^\mu,$$

indicando que A_μ se torna massivo — este é o cerne do mecanismo de Higgs abeliano.

Relação com o caso abeliano $U(1)$

Potencial do tipo chapéu mexicano: o mesmo formato clássico,

$$V(\phi) = \lambda(|\phi|^2 - \eta^2)^2$$

garante degeneração de fases e VEV não-nulo.

parametrização polar + rotação de gauge: escrever ϕ em coordenadas polares e escolher gauge unitário define $\theta(x) = 0$, eliminando o campo de Goldstone — justamente porque esse grau de liberdade é "anulado" por A_μ que ganha massa.

Termo de massa: expanda o termo $|D_\mu \phi|^2$ em gauge unitário:

$$D_\mu \phi \approx i e \eta A_\mu + \dots \Rightarrow |D_\mu \phi|^2 \supset e^2 \eta^2 A_\mu A^\mu,$$

demonstrando diretamente a aquisição de massa por A_μ — mais especificamente:

$$m_A = e \eta.$$

O potencial tipo chapéu mexicano cria um VEV $|\phi| = v$, destruindo a simetria global em favor de um vácuo degenerado. - Em conjunto com simetria local abeliana, isso permite que o campo de fase $\theta(x)$ seja eliminado via gauge unitário, carregando consigo o

termo que dá massa ao gauge boson. O resultado é o mecanismo de Higgs abeliano: um campo de gauge que antes era sem massa e se torna massivo, pelo teorema de Goldstone.

O Teorema de Goldstone afirma que:

Para cada gerador contínuo de simetria global que é espontaneamente quebrado por um vácuo não invariante, há um bóson escalar sem massa

4.5 Simetria Não-Abeliana e o Formalismo de Yang-Mills

A teoria de Yang-Mills tem sua formulação idealizada na mecânica quântica, essa parte será ignorada neste trabalho a usaremos aqui apenas como um recurso físico-matemático para o acoplamento dos campos de corda cósmica e de matéria escura.

Usando os grupos de simetrias $SU(N)$ para realizar uma transformação simétrica que por rotação, usaremos uma transformação contínua com fase a $e^{-i\theta^a T_a}$ da seguinte forma [6]

$$\phi \implies \phi' = U\phi \quad (4.15)$$

onde ϕ é um spinor:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

e

$$U = e^{-i\theta^a T_a} \quad (4.16)$$

temos as seguinte propriedade para essa fase que é uma combinação linear de um parâmetro e geradores $\theta_1 T_1, \theta_2 T_2, \dots$ e quanto a matriz T_a

$$T_a^\dagger = T_a (\text{hermitiano})$$

$$\text{tr}(T_a) = 0 (\text{traço nulo})$$

$$[T_a, T_b] = if^{abc} T_c (\text{algebra de Lie}).$$

Que para o caso da simetria global, tem apenas uma fase que em vez de ter $(n^2 - 1)$ geradores tem apenas um gerador que é a propria identidade, que na algebra de Lie comuta com ela mesmo e assim qualquer transformação de fase comuta com si.

Utilizando a transformação de Gauge para realizar a passagem de simetria global para a local, temos as seguintes transformações:

$$\partial_\mu \implies D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_A \quad (4.17)$$

onde D_μ é uma derivada covariante
e a simetria local

$$\phi' = U\phi \quad (4.18)$$

tendo a variação como

$$A_\mu'^a = UA_\mu^a U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \quad (4.19)$$

com

$$\delta A_\mu^a = -\frac{i}{g}D_\mu^{ab}\theta^b \quad (4.20)$$

a variação de ϕ

$$\delta\phi = -i\theta^a T_a \phi \quad (4.21)$$

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu - gf^{abc}A_\mu \quad (4.22)$$

Nesta última temos a derivada covariante na representação adjunta. O calculo do comutador da derivada covariante na relatividade geral traz informações sobre a curvatura do espaço-tempo, aqui trás informações sobre a curvatura do espaço interno.

Assim

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu} \quad (4.23)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (4.24)$$

desenvolvendo as coordenadas de Gauges A_μ podemos reescrever os $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = F_\mu^a T^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.25)$$

Onde a transformação de $F_{\mu\nu} \implies UF_{\mu\nu}U^{-1}$, Assim:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \implies UF_{\mu\nu}U^{-1}UF_{\mu\nu}U^{-1} = UF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}U^{-1} \quad (4.26)$$

Se usamos aqui apenas $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ não obteremos que não resulta em um objeto invariante, logo podemos utilizar-lo na lagrangiana, uma vez que, a lagrangiana deve ser

apenas um escalar não podendo realizar transformação em sua variação temos que outro termo se faz necessário. Tomando o traço de $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ e usando a propriedade ciclica podemos mudar a atuação de um objeto, neste caso fazendo:

$$tr[U F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} U^{-1}] \implies tr[U U^{-1} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] = tr[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \quad (4.27)$$

e portanto

$$tr[F_{\mu\nu}^a T_a F_b^{\mu\nu} T_b], \quad (4.28)$$

como o traço é linear temos

$$tr[F_{\mu\nu}^a T_a F_b^{\mu\nu} T_b] = F_{\mu\nu}^a F_b^{\mu\nu} tr[T_a T_b] \quad (4.29)$$

agora temos os traços do que seriam as matrizes, ou o traço dos geradores. Sendo este traço a normalização dos geradores e assim temos que

$$tr[T_a T_b] = c F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^b \delta^{ab} \quad (4.30)$$

o que faz com que tenhamos $a=b$ e por fim, c é uma constante de normalização que depende da representação,

$$\therefore tr[F_{\mu\nu}^a T_a F_b^{\mu\nu} T_b] \propto F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (4.31)$$

a menos de uma constante qualquer.

Capítulo 5

Acoplamento com a Energia escura

No início do século XX, houve revelações fundamentais sobre o funcionamento do cosmos. A descoberta observacional mais significativa foi o afastamento das galáxias, evidenciado por Edwin Hubble na década de 1920, o que permitiu concluir que o universo está em expansão.

Durante o desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral, Einstein constatou que suas equações implicavam um universo dinâmico (capaz de se expandir ou contrair). Para manter a crença vigente de um universo estático, ele introduziu em 1917 a constante cosmológica (Λ), que funcionava como uma força repulsiva equilibrando a atração da matéria. Contudo, após as observações de Hubble, Einstein abandonou essa constante, considerando-a dispensável e até mesma um erro teórico.

Nas décadas seguintes, cientistas como Friedmann e Lemaître desenvolveram modelos cosmológicos que já previam um universo em expansão, compatíveis com Relatividade Geral sem Λ .

Nos anos 1990, observações de estrelas Cefeidas ajudaram a calibrar distâncias astronômicas, preparando o caminho para o uso de supernovas do tipo Ia como indicadores confiáveis de distância. Em 1998, duas equipes astronômicas independentes detectaram, por meio dessas supernovas, que a expansão do universo está se acelerando. Portanto, só poderia haver alguma forma de energia desconhecida capaz de impulsionar essa aceleração: a energia escura.

Desde então, a energia escura passou a ser interpretada como equivalente à constante cosmológica de Einstein, correspondendo à densidade de energia do vácuo com efeito repulsivo, e constituindo aproximadamente 68–70% da densidade total do universo no modelo Λ CDM atual.

No enquadramento da Relatividade Geral, a aceleração ocorre quando o fluido cósmico tem pressão efetiva negativa, tornando $(\rho + 3p/c^2) < 0$ na equação de aceleração de Friedmann, o que faz $\ddot{a} > 0$ (o fator de escala acelera).

Podemos utilizar o mecanismo mais simples (Λ): A explicação de referência é a constante cosmológica (Λ), equivalente a energia do vácuo com equação de estado $w =$

$p/\rho c^2 = -1$. Nesse caso, a densidade de energia escura é (aproximadamente) constante por volume; conforme o espaço se expande, o total de energia do vácuo aumenta e a expansão acelera cada vez mais.

Como isso aparece nas equações? A segunda equação de Friedmann pode ser escrita como $\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3pc^2) + \frac{\Lambda c^2}{3}$. Para $w = -1$ (caso Λ), o termo efetivo é repulsivo e impulsiona a aceleração cósmica.

Nosso propósito neste trabalho é obter as equações de campo para o acoplamento do campo de corda cósmica e de energia escura não-minimamente acoplado com o campo de gravidade, uma vez que a medida que o universo se expande ocorre a quebra espontânea de simetria gerando o surgimento do mecanismo de Higgs. Dado pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_e, \quad (5.1)$$

com

$$\mathcal{L}_c = F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + |D\phi|^2 - V(\phi, \phi^*) \quad (5.2)$$

e

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}(1 - \xi\chi^2)R + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\chi - V \quad (5.3)$$

, onde o ϕ representa o campo de corda cósmica e χ o campo de energia escura, o termo $(1 - \xi\chi^2)R$ é o termo de acoplamento não mínimo entre o campo gravitacional e a matéria escura, sendo ξ o termo de acoplamento [12].

Acoplamento não-mínimo $(1 - \xi\chi^2)R$. Esse termo adiciona interação direta entre o escalar χ , campo de energia escura e a curvatura R , o coeficiente ξ é crucial por ser o termo de acoplamento dos campos.

$$\mathcal{L} = [F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + |D\phi|^2] - V(\phi, \phi^*) + \sqrt{-g}[\frac{1}{2}(1 - \xi\chi^2)R + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu\chi - V] \quad (5.4)$$

onde temos a soma da densidade da corda cósmica e a do setor escuro acoplado com o de gravidade

onde o primeiro termo é o de Yang–Mills $F_{\mu\nu}^a$ que representa a energia do campo de calibre, sendo um campo que compensa a transição para a simetria local.

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (5.5)$$

É, assim, invariante sob transformações de gauge não-abelianas $SU(N)$.

O termo cinético com derivada covariante $D_\mu\phi$, Captura a interação do escalar complexo ϕ com o campo de calibre:

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - igT^a A_\mu^a \phi \quad (5.6)$$

Esse operador garante invariância sob transformações de gauge locais.

Como já comentado na secção 5.2 o potencial $V(\phi, \phi^*)$ define a auto-interações do campo escalar ϕ , podendo assumir formas como o potencial de Higgs $\lambda(|\phi|^2 - v^2)^2$, favorecendo quebra espontânea de simetria.

A variação da densidade lagrangiana para tal é:

$$\delta = \int dx^4 [F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + |D\phi|^2] - V(\phi, \phi^*) + dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (1 - \xi \chi^2) R + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \chi - V \right] = 0 \quad (5.7)$$

vamos analisar a variação da lagrangiana para cada termo.

Variação em A_μ^a para o primeiro termo, equação (95)

Sob uma variação infinitesimal δA_μ^a , temos:

$$\delta F_{\mu\nu}^a = D_\mu(\delta A_\nu^a) - D_\nu(\delta A_\mu^a),$$

onde D_μ é a derivada covariante de Yang–Mills.

$$\delta \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \right) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a (\partial_\mu \delta A_\nu^a - \partial_\nu \delta A_\mu^a + g f^{abc} (\delta A_\mu^b) A_\nu^c + g f^{abc} A_\mu^b (\delta A_\nu^c)) \quad (5.8)$$

onde foi usado o fato de que $F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a$ são iguais, logo temos um fator 2, e usando a regra da cadeia temos a ação da variação, desta temos

$$-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \partial_\mu \delta A_\nu^a + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \partial_\nu \delta A_\mu^a - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a g f^{abc} (\delta A_\mu^b) A_\nu^c - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a g f^{abc} A_\mu^b (\delta A_\nu^c) \quad (5.9)$$

podemos realizar troca de índices $\mu \rightarrow \nu$ e também o oposto para que possamos usar a antissimetria de $F_{\mu\nu}^a$, fica $-F_{\mu\nu}^a$, também podemos operar de forma analoga para os índices $b \rightarrow c$ e assim obter que $f^{abc} = -f^{acb}$ e portanto $-f^{abc}$, ressaltando a propriedade antissimetrica da estrutura de grupo. Por fim temos:

$$-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \partial_\mu \delta A_\nu^a - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a \partial_\nu \delta A_\mu^a - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a g f^{abc} (\delta A_\nu^c) A_\mu^b - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a g f^{abc} A_\mu^b (\delta A_\nu^c) \quad (5.10)$$

que por fim:

$$-F_{\mu\nu}^a \partial_\mu \delta A_\nu^a - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a g f^{abc} A_\mu^b (\delta A_\nu^c). \quad (5.11)$$

Integração por partes (desprezando os termos de borda):

$$\int (\partial_\mu F_{\mu\nu}^a) \delta A_\nu d^4x \longrightarrow - \int F_{\mu\nu}^a \partial_\mu (\delta A_\nu^a) d^4x + \underbrace{\int_{\partial \text{região}} F_{\mu\nu}^a \delta A_\nu^a dx^4}_{\text{termo de borda}}$$

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = j^{a\nu}, \quad j^{a\nu} = ig[\phi^* T^a D^\nu \phi - (D^\nu \phi)^* T^a \phi].$$

Esse é o resultado padrão em Yang–Mills com participação do campo escalar.

Variação em ϕ Considere o setor escalar complexo acoplado a um campo de calibre. A densidade lagrangiana mínima é:

$$\mathcal{L}_\phi = \underbrace{|D_\mu \phi|^2}_{\text{Cinética gauge-invariante}} - \underbrace{V(\phi, \phi^*)}_{\text{Potencial escalar}}.$$

a derivada covariante $D_\mu \phi$, nas secções anteriores, foi definida como:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ig A_\mu \phi,$$

no caso de um grupo abeliano $U(1)$, ou geral:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ig A_\mu^a T^a \phi, \quad (5.12)$$

em grupos não abelianos (como $SU(N)$) — com A_μ^a o campo de calibre e T^a os geradores da álgebra de Lie. Essa derivada garante que $\mathcal{L}_\phi$ seja invariante sob transformações de gauge locais, ou seja, substituímos ∂_μ por D_μ via acoplamento mínimo.

O termo cinético $|D_\mu \phi|^2$ representa a energia cinética do campo ϕ . Inclui tanto a variação espacial quanto a temporal quanto o acoplamento com A_μ . Expande-se como:

$$|D_\mu \phi|^2 = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi).$$

$$\delta(|D\phi|) = \delta((D\phi)^\dagger (D\phi)) \quad (5.13)$$

onde, pela equação (5.6) ,

$$\delta(D_\mu \phi) = -ig(T^a \phi) \delta A_\mu^a \quad (5.14)$$

aplicando na equação (5.13) temos:

$$\delta(|D\phi|) = -ig[(D^\mu \phi)^\dagger T^a \phi - ig(D^\mu \phi) T^a \phi] \delta A_\mu^a \quad (5.15)$$

onde o termo dentro das chaves é a definição de corrente de gauge

$$J_\mu^a = [(D^\mu \phi)^\dagger T^a \phi - ig(D^\mu \phi) T^a \phi] \quad (5.16)$$

assim:

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = j^{a\nu} \quad (5.17)$$

e podemos definir, com relação a δA_μ^a

$$\delta(|D\phi|) = -igJ_\mu^a \delta A_\mu^a \quad (5.18)$$

Mantém a invariância de gauge graças ao comportamento covariante de $D_\mu\phi$: sob transformação local, $\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi$ e $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha$, o termo sofre apenas fase cancelada, garantindo a invariância.

Já o potencial $V(\phi, \phi^*)$ Esse potencial inclui termos de massa e interações autônomas (como $\lambda|\phi|^4$). Formas comuns são:

$$V(\phi, \phi^*) = \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2$$

que conhecido como o potencial do chapéu mexicano, há quebra espontânea de simetria (mecanismo de Higgs).

A variação leva a:

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0. \quad (5.19)$$

Equivale a um Klein-Gordon covariante acoplado a gauge.

Variação em χ (acoplamento não mínimo)

A contribuição desta variação é descrita em detalhes em [12]

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[(1-\xi\chi^2) (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \delta g^{\mu\nu} - \xi\chi^2 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + [\partial^\mu \chi \partial^\nu \chi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial^\sigma \chi \partial_\sigma \chi + g^{\mu\nu} V(\chi) \delta g_{\mu\nu}] \right]$$

onde R é o escalar de Ricci, ξ é o parâmetro de acoplamento, χ é o campo escalar.

a variação do termo $\xi\phi^2 g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ produz

$$\xi (\nabla_\mu \nabla_\nu (\chi^2) - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (\chi^2)) \delta g^{\mu\nu}$$

definimos os tensores de energia-momento para os campos presentes:

$$T_{\mu\nu}^\chi = [\partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - (\frac{1}{2} \partial^\sigma \chi \partial_\sigma \chi - V) g_{\mu\nu} - \xi (\nabla_\mu \nabla_\nu (\chi^2) - g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma \chi^2)],$$

$$T_{\mu\nu}^{(\chi)} = \nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (\nabla \chi)^2 + V(\chi) \right),$$

onde agora temos as contribuições de cada parte

$$\delta S = \frac{1}{2} \int (1 - \xi \chi^2) (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \quad (5.20)$$

finalmente chegando a equação de campo de Einstein para esse caso:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{T_{\mu\nu}}{(1 - \xi \chi^2)} \quad (5.21)$$

Esta equação descreve a dinâmica gravitacional modificada por um campo escalar χ não-minimalmente acoplado. Os termos adicionais introduzem dependência do campo escalar na geometria do espaço-tempo, afetando a evolução do universo em escalas cosmológicas.

Este é o resultado típico de um campo escalar não-minimo, conforme [12].

Como demonstrado em [12], é possível ainda obter a equação de evolução para o campo escalar de energia escura

$$\nabla_\sigma \nabla^\sigma \chi - \xi R \chi + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0 \quad (5.22)$$

Dentro de uma dinâmica de acoplamento da corda cósmica com os setores escuro e gravitacional não-minimalmente acoplados, obtivemos as equações resultantes das contribuições tanto para o campo de Gauge e os campos escalares ϕ e χ . A equação 5.17 garante a conservação de grandezas da lagrangiana do sistema, uma vez que desempenha o papel de preservar a invariância. A equação 5.19 se assemelha a já conhecida equação de Klein-Gordon, o que pode indicar um comportamento analógico a uma equação de evolução dentro de um campo de gauge junto ao de Higgs.

As contribuições dos setores escuro e gravitacional são expressas pelas equações 5.21 (onde temos que para esse caso em que $\xi = 0$ voltamos a equação de campo de Einstein) e 5.22 que são a equação de campo de Einstein para o acoplamento e a equação de evolução dos campos, respectivamente. produzem um conjunto de equações onde segundo Binder [12] nós temos a possibilidade de análise desta dinâmica.

Em um trabalho futuro há a possibilidade de avaliar de forma numérica a interação entre o campo de gauge através do mecanismo de Higgs e o acoplamento dos setores escuro e gravitacional bem como das dinâmicas de evolução temporal para o caso da expansão do universo e obter as influências do acoplamento entre estes campos escalares.

Equações de Campo Completas

Os termos da variação da lagrangiana nos fornecem um grupo de equações que são as equações de campo por fim leva a

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = j^{a\nu} \quad (1),$$

$$D_\mu D^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad (2),$$

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{T_{\mu\nu}}{(1 - \xi\chi^2)} \quad (3), \quad (5.23)$$

$$\nabla_\sigma \nabla^\sigma \chi - \xi R\chi + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0 \quad (4).$$

As equações 5.23 formam um sistema minimamente acoplado que descreve a interação entre os campos de Higgs não abelianos e o setor escuro, acoplado de forma não mínima ao setor gravitacional. A contribuição dos termos referentes ao campo de Yang–Mills, representado pelo tensor $F^{a\mu\nu}$, na Eq. (6.1.1), desenvolvida para as coordenadas de calibre A_μ , mostra a transição de uma simetria global para uma simetria local. Ao observarmos a contribuição para ϕ na Eq. (6.1.2), verificamos que a variação da lagrangiana $\mathcal{L}_c$ em relação a ϕ é análoga à equação de Klein–Gordon. A presença do termo de acoplamento ξ na Eq. (6.1.3) indica um acoplamento geométrico entre os setores, enquanto a Eq. (6.1.4) representa a equação de evolução da contribuição do setor de energia escura. Essas equações resultam diretamente do formalismo de Euler–Lagrange para campos com acoplamento não mínimo e são padrão em teorias gravitacionais com campos escalares. Assim, obtém-se a equação de campo que descreve o acoplamento entre o setor escuro e o setor gravitacional. Como foi possível demonstrar neste trabalho, chegamos à equação de campo correspondente ao caso de acoplamento entre o campo de uma corda cósmica e o campo de energia escura.

Capítulo 6

Considerações finais

Ao longo desta dissertação, foi apresentado um percurso teórico que parte da fundamentação de grupos e simetrias, estendendo-se aos grupos de Lie, álgebras de Lie, e à distinção crítica entre simetrias abelianas e não-abelianas, com o objetivo de estabelecer a base conceitual necessária para uma análise cosmológica mais profunda. Essas estruturas matemáticas não são meras abstrações, mas refletem a organização fundamental das interações físicas no universo primordial, onde teorias de gauge não-abelianas — como as do Modelo Padrão estendido — desempenham um papel central na formação de defeitos topológicos, incluindo as cordas cósmicas.

Em particular, investigou-se como as cordas cósmicas, defeitos topológicos unidimensionais formados em transições de fase associadas à quebra de simetria não-abeliana no universo primordial, podem interagir dinamicamente com a energia escura, influenciando a expansão acelerada do cosmos. Esses objetos surgem naturalmente em teorias de campo com simetrias não-abelianas mais ricas (grupos $SU(2)$ ou $SO(3)$), onde a topologia do vácuo permite configurações estáveis de cordas como soluções de tipo "vórtice" em múltiplas dimensões. Sua evolução é governada não apenas pela gravidade, mas também por acoplamentos não-triviais com campos escalares e tensoriais, incluindo potenciais candidatos à energia escura, como quintessência.

Essa riqueza estrutural permite que as cordas cósmicas atuem em acoplamento mínimo com campos escalares associados ao vácuo cosmológico ou à energia escura, conforme discutido em extensões modernas da cosmologia, como modelos com setores escuros interagentes. Nesse contexto, a dinâmica das cordas pode modular a equação de estado efetiva da energia escura, introduzindo correções que variam com o redshift e desafiam a interpretação convencional de uma constante cosmológica estática.

O conjunto de equações derivado no capítulo final deste trabalho (ver equações 5.23) propõe uma relação quantitativa entre a densidade de energia das cordas cósmicas 5.2 e a densidade efetiva da energia escura 5.3, expressa através de equações de conservação e evolução acopladas.

Este trabalho conclui destacando que a sinergia entre simetrias não-abelianas, topologia cósmica e setores escuros oferece um caminho promissor para resolver enigmas contemporâneos, desde a natureza da energia escura até a unificação da gravitação com a física de altas energias. As equações aqui desenvolvidas abrem portas para testes observacionais mais refinados, vinculando a elegância matemática das simetrias à complexidade fenomenológica do universo acelerado.

Referências Bibliográficas

- [1] CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2004.
- [2] WEBER, F. *Introdução à Relatividade Geral e à Física de Estruturas Compactas*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2015.
- [3] GROEN, E. *Cosmic Strings*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — University of Amsterdam, Amsterdam, 2009.
- [4] JACKSON, J. D. *Eletrodinâmica Clássica*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. Tradução da obra original: Classical Electrodynamics, 3rd ed.
- [5] NETO, J. B. *Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica*. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017.
- [6] NASTASE, H. *Classical Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- [7] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1984. ISBN 0-226-87033-2.
- [8] SÁNCHEZ, E. *Cálculo Tensorial*. [S.l.]: Editora Interciência, 2011.
- [9] NOVELLO, M. *cosmologia*. São Paulo: Livraria da Física, 2010.
- [10] SOUSA, R. E. d. *Introdução à Cosmologia*. [S.l.]: EDUSP, 2019.
- [11] SANTOS, J. F. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física), *Grupos de Lie, simetrias e suas aplicações em Física*. Uberlândia: [s.n.], 2020. 67 p.
- [12] BINDER, J. B. *Modelos Cosmológicos com Campo Escalar Não-Minimamente Acoplado e Interações no Setor Escuro*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.
- [13] LAMBOURNE, R. J. A. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Cambridge; New York; Milton Keynes: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780521131384.

APÊNDICES

Capítulo A

Derivação da Equação da Geodésica.

Partimos da ação para uma curva $x^\mu(\lambda)$, onde λ é um parâmetro afim:

$$S = \int ds = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda.$$

Usamos a **ação equivalente** (que produz as mesmas equações):

$$S = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda.$$

A lagrangiana é:

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad \text{onde} \quad \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}.$$

A equação de Euler-Lagrange para x^α :

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Calculamos os termos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu,$$

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu) = \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu.$$

Substituindo:

$$\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Para os símbolos de Christoffel, Reorganizando e usando a simetria $\mu \leftrightarrow \nu$:

$$g_{\alpha\nu}\ddot{x}^\nu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Definindo os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}).$$

Multiplicando por $g^{\alpha\beta}$:

$$\ddot{x}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Equação Geodésica Final:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

Caso Especial: Tempo Próprio

Para $\lambda = \tau$ (tempo próprio em RG):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

Derivação via Transporte Paralelo

Alternativamente, definindo geodésicas como curvas com transporte paralelo:

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x}^\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0.$$

Capítulo B

Teorema de Noether.

O Teorema de Noether, formulado por Emmy Noether em 1915, estabelece uma profunda conexão entre simetrias contínuas de sistemas físicos e leis de conservação. Em termos simples, o teorema afirma que para cada simetria contínua de uma ação física, existe uma quantidade conservada associada. Este resultado é fundamental para a física teórica, pois permite derivar leis de conservação a partir de simetrias subjacentes dos sistemas.

Para entender essa relação, consideremos um sistema físico descrito por uma função Lagrangiana $L(q_a, \dot{q}_a, t)$, onde q_a são as coordenadas generalizadas, $\dot{q}_a$ são as velocidades generalizadas e t é o tempo. A ação S é dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Uma transformação infinitesimal δq_a nas coordenadas generalizadas é dita uma simetria se a ação S permanece inalterada sob essa transformação. Em outras palavras, a variação da ação δS deve ser zero:

$$\delta S = 0.$$

Aplicando o princípio de Hamilton de ação estacionária, obtemos a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0.$$

Quando a Lagrangiana é invariante sob uma transformação contínua, existe uma corrente conservada associada a essa simetria. A corrente de Noether J^μ é dada por:

$$J^\mu = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \frac{\delta q_a}{\delta x_\mu} - F^\mu,$$

onde F^μ é uma função que depende da transformação específica. A conservação dessa corrente implica na equação de continuidade:

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

Essa equação significa que a quantidade associada à simetria é conservada no tempo e no espaço.

Agora, vamos analisar alguns exemplos específicos de simetrias e as quantidades conservadas correspondentes:

- **Simetria temporal:** Se a Lagrangiana não depende explicitamente do tempo, ou seja, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, a ação é invariante sob translações no tempo. De acordo com o Teorema de Noether, isso implica na conservação da energia. A energia E é dada por:

$$E = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a - L.$$

A conservação de energia é expressa por:

$$\frac{dE}{dt} = 0.$$

- **Simetria espacial:** Se a Lagrangiana não depende explicitamente das coordenadas espaciais, ou seja, $\frac{\partial L}{\partial q_a} = 0$, a ação é invariante sob translações no espaço. Isso leva à conservação da quantidade de movimento linear p_a , dada por:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}.$$

A conservação da quantidade de movimento é expressa por:

$$\frac{dp_a}{dt} = 0.$$

- **Simetria de rotação:** Se a Lagrangiana é invariante sob rotações no espaço, isso implica na conservação do momento angular L_a , dado por:

$$L_a = \sum_b \epsilon_{abc} q_b p_c,$$

onde ϵ_{abc} é o símbolo de Levi-Civita. A conservação do momento angular é expressa por:

$$\frac{dL_a}{dt} = 0.$$

- **Simetria de gauge:** Em teorias de campos, simetrias de gauge, como a invariância sob transformações de calibre, levam à conservação de correntes associadas a essas simetrias. Por exemplo, na eletrodinâmica, a invariância sob transformações de fase leva à conservação da carga elétrica.

Esses exemplos ilustram como o Teorema de Noether fornece uma ferramenta poderosa para derivar leis de conservação a partir de simetrias fundamentais dos sistemas físicos. Essa abordagem é amplamente utilizada em diversas áreas da física, incluindo mecânica clássica, teoria de campos e física de partículas.

Capítulo C

Derivações das equações de Friedmann.

Começamos com a hipótese de que o universo é *homogêneo* e *isotrópico* em grande escala, o que nos permite adotar a métrica de *Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker* (FLRW):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right],$$

Onde temos $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1 - Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e $K = -1, 0, +1$ representa a curvatura espacial (hiperbólica, plana ou esférica).

Consideramos que o conteúdo do universo se comporta como um *fluido perfeito* [7, 9, 13], com densidade de energia $\rho(t)$ e pressão $p(t)$. O tensor energia–momento é dado por:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}.$$

Inserindo esse tensor nas equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

focamos na componente temporal $(0, 0)$,

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}, \quad R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right).$$

Agora, substituindo na componente $(0, 0)$ de (??), usando $g_{00} = -1$ e $T_{00} = \rho$:

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R &= 8\pi G \rho \\ -3 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \left(-6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] \right) &= 8\pi G \rho \\ 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3 \frac{k}{a^2} &= 8\pi G \rho. \end{aligned}$$

Rearranjando, obtemos a primeira equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho,$$

onde $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ é o parâmetro de Hubble.

Analisando as componentes espaciais (i, i) , podemos usar as propriedades do espaço extremamente simétricos para definir R_{ij} e obtemos a segunda equação de Friedmann, também chamada de equação de aceleração:

$$R_{ij} = [a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k] g_{ij}/a^2, \quad T_{ij} = p g_{ij}.$$

Além disso,

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right).$$

Substituindo na componente (i, i) do tensor de Einstein e eliminando g_{ii} :

$$\begin{aligned} R_{ii} - \frac{1}{2} R g_{ii} &= 8\pi G p g_{ii}, \\ \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2} - \frac{1}{2} \cdot 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) &= 8\pi G p. \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k}{a^2} - 3 \frac{\ddot{a}}{a} - 3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi G p, \\ -2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= 8\pi G p. \end{aligned}$$

Usando a primeira equação de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho,$$

obtém-se:

$$-2\frac{\ddot{a}}{a}\rho = 8\pi G p.$$

Agrupando termos:

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G p + \frac{8\pi G}{3}\rho.$$

Dividindo por -2 :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right).$$

Além disso, a conservação do tensor energia-momento, $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, implica na equação de continuidade:

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0.$$

Portanto, obtemos um sistema de três equações fundamentais em cosmologia:

1. **Equação de expansão:**

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}.$$

2. **Equação de aceleração:**

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right).$$

3. **Equação de conservação de energia:**

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0.$$

Essas equações descrevem a evolução temporal do fator de escala $a(t)$ em função da densidade de energia ρ , pressão p e curvatura espacial K constituem a base da cosmologia moderna.

Capítulo D

Modelo de Higgs

A partir do Teorema de Goldstone: que em uma teoria de campo relativística com simetrias contínuas globais que são espontaneamente quebradas, surgem partículas sem massa chamadas bósons de Goldstone. Esses bósons correspondem aos modos de oscilação do campo no espaço das simetrias quebradas. Por exemplo, se uma simetria contínua é quebrada, cada gerador quebrado da simetria está associado a um bóson de Goldstone.

Quando a simetria quebrada é uma simetria de gauge local (ou seja, uma simetria dependente da posição no espaço-tempo), o cenário muda. Nesse caso, os bósons de Goldstone "desaparecem" do espectro observável, pois são "absorvidos" pelos bósons de gauge correspondentes, conferindo-lhes massa. Esse processo é conhecido como Mecanismo de Higgs. Em vez de bósons de Goldstone livres, temos bósons de gauge massivos com um grau de liberdade adicional. Isto ocorre a baixo de uma temperatura crítica, sendo uma consequência da expansão acelerada do universo.

O mecanismo de Higgs para o caso de um modelo não abeliano possui a lagrangiana 5.2:

$$\mathcal{L} = \int d^4x [F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + |D\phi|^2] - V(\phi, \phi^*)]$$

na equação 5.5 temos a parte cinética do campo de gauge:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{D.1})$$

onde o termo de massas está introduzido na derivada covariante $|D\phi|^2$ que como atua sobre um campo complexo é expandida 5.6:

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i g T^a A_\mu^a \phi \quad (\text{D.2})$$

e por fim o termo de potencial é $V(\phi, \phi^*)$ que produz o tipo chapéu mexicano, figura 3.3

$$V(\phi, \phi^*) = \lambda (|\phi|^2 - v^2)^2$$

A lagrangiana para o mecanismo de Higgs em questão é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}g^2v^2 A_\mu^a A^{a\mu} - \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2 + \mathcal{L}_{int} \quad (\text{D.3})$$

onde $\mathcal{L}_{int}$ contém termos da altas ordem em ϕ .

O Teorema de Goldstone e o Mecanismo de Higgs são conceitos fundamentais na física de partículas, ambos relacionados à quebra espontânea de simetria, mas com implicações distintas dependendo do tipo de simetria envolvida, uma vez que há a "absorção" no processo de quebra de simetria.