



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
CAMPUS SEDE  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Ikaro Joseph Andrade Chaves

**Multifractalidade e Correlações: Uma análise em séries temporais de diversidade em modelo de ecossistema com competição por recursos**

Recife/PE

2024



UNIVERSIDADE  
FEDERAL RURAL  
DE PERNAMBUCO

MULTIFRACTALIDADE E CORRELAÇÕES: UMA ANÁLISE EM SÉRIES TEMPORAIS DE  
DIVERSIDADE EM MODELO DE ECOSISTEMA COM COMPETIÇÃO POR RECURSOS

Ikaro Joseph Andrade Chaves

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, da Universidade Federal Rural de Pernambuco para a obtenção do título de Mestre em Física.  
Orientador: Viviane Moraes de Oliveira  
Coorientador: Nathan Lima Pessoa

Recife/PE

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

I26Andra de Chavesm Andrade, Ikaro Joseph Andrade Chaves  
Multifractalidade e Correlações: Uma análise em séries temporais de diversidade em modelo de ecossistema com competição por recursos / Ikaro Joseph Andrade Chaves Andrade. - 2024.  
74 f. : il.

Orientadora: Viviane Moraes de Oliveira.  
Coorientador: Nathan Lima Pessoa.  
Inclui referências, apêndice(s) e anexo(s).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, 2024.

1. Heterogeneidade Espacial. 2. Multifractalidade. 3. Dinâmica Populacional. I. Oliveira, Viviane Moraes de, orient. II. Pessoa, Nathan Lima, coorient. III. Título

**Ikaro Joseph Andrade Chaves**

**Multifractalidade e Correlações: Uma análise em séries temporais de diversidade em modelo de ecossistema com competição por recursos**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof.(a) Viviane Moraes de Oliveira, Dr.(a)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Coorientador: Nathan Lima Pessoa, Dr.(a)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof.(a) Tatijana Stosic, Dr.(a)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof.(a) Katiane Silva Conceição, Dr.(a)  
Universidade de São Paulo

Dedicado a todos que contribuem para a educação pública no Brasil.

# Agradecimentos

Primeiramente, desejo expressar minha mais profunda gratidão à minha orientadora, Viviane Moraes de Oliveira ao ao meu coorientador Nathan Lima Pessoa e a minha orientadora da graduação da iniciação científica Sara Cristina Pinto Rodrigues, cuja orientação sábia, apoio inabalável e comprometimento foram fundamentais para a concretização deste trabalho. Seu profissionalismo e dedicação não apenas moldaram este projeto, mas também contribuíram imensamente para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

Gostaria de dedicar um parágrafo especial para expressar minha gratidão à minha família, cujo amor, apoio e compreensão foram pilares essenciais ao longo desta jornada. Em especial, gostaria de agradecer à minha mãe Juju Andrade Rodrigues, cujo amor incondicional e sacrifícios pessoais foram a luz que iluminou meu caminho, guiando-me com sabedoria e amor. À minha avó Julieta Andrade Rodrigues, fonte inesgotável de carinho e sabedoria, agradeço por suas palavras de encorajamento e por ser um exemplo de força e resiliência. Ao meu pai João Batista Cardoso Chaves, expresse minha profunda gratidão por seu apoio inabalável. À minha companheira Maria Beatriz Dos Santos, cujo apoio fora meu refúgio nos momentos de dúvida e cansaço, agradeço por sua presença constante e por ser minha fonte de inspiração diária. As minhas tias Juscelina Andrade Rodrigues, Madelon Andrade Rodrigues aos meu tio Democrito Dias de Araujo e ao meu primo Dalton, agradeço por todo o apoio, incentivo e por compartilharem comigo momentos de alegria e celebração, tornando esta jornada ainda mais significativa e especial. Cada um de vocês contribuiu de forma única e especial para o meu crescimento pessoal e acadêmico, e por isso, sou profundamente grato.

Aos meus amigos e colegas Johnny Jose da Silva, Michel Arruda Lopes de Araujo, Diego Bruno da Fonseca, Arthur Luan Alves, Erisson F. Alemão, João Victor Alves Vasconcelos, Antonio Bernardo, Luan Martins Torres de Moraes, Luciano Bezerra João Mário Alves de Lucena, Laedson Luan dos Santos Silva, Thiago de Castro Silva, Rodrigo Antônio Barbosa Ferreira, Marcos Sousa, José Dias da Silva Neto, Pedro Lucas Lourenço da Silva, Eduardo Gomes de Araújo, Luidje Daniel Oliveira Lopes e Lucas Pereira que compartilharam comigo não apenas a jornada acadêmica, mas também momentos de descontração e apoio mútuo. Suas conversas, risadas e encorajamento foram fundamentais para superar os desafios e celebrar as conquistas ao longo deste percurso.

Expresso aqui minha imensa gratidão a todos os professores que moldaram meu percurso educacional, desde a educação infantil até a faculdade. Cada um desses educadores desempenhou um papel crucial em minha jornada, inspirando-me, desafiando-me e

proporcionando-me o conhecimento necessário para alcançar meus objetivos. Aos professores da educação infantil a minha mãe Jujú andrade como sendo minha primeira professora e a Fabiana Barbosa por me ensinar as palavras escritas, agradeço por plantarem as sementes do aprendizado e por despertarem em mim a curiosidade pelo mundo ao meu redor. Aos mestres do ensino fundamental e médio em especial ao da escola pública do governo de pernambuco e como minha mentora, incentivadora e colo de desabafo Vivian Mesquita, expresso minha gratidão pela dedicação incansável em transmitir conhecimento e valores, preparando-me para os desafios futuros. Aos professores do cursinho pré-vestibular, agradeço por sua orientação especializada e por me ajudarem a alcançar meu máximo potencial durante essa fase crucial, em especial ao meu Grande Mestre e mentor pelo qual escolhi o curso de física e a carreira acadêmica Itallo Costa. E, por fim, aos professores universitários, cujo conhecimento, experiência e paixão pela aprendizagem foram fundamentais para minha formação acadêmica e profissional, expresso minha mais profunda gratidão. Cada um desses educadores deixou uma marca indelével em minha vida, e por isso, sou eternamente grato por seu compromisso inabalável com o meu sucesso e crescimento pessoal.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão à FACEPE - Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia de Pernambuco, pelo apoio financeiro concedido durante a realização deste trabalho. O suporte fornecido pela FACEPE foi fundamental para viabilizar a execução deste projeto de pesquisa, permitindo o acesso a recursos e infraestrutura necessários para sua realização. A confiança depositada em meu trabalho pela FACEPE não apenas facilitou a condução desta dissertação, mas também fortaleceu meu compromisso com a produção de conhecimento científico relevante e inovador. Agradeço profundamente à FACEPE por seu investimento no desenvolvimento da ciência e tecnologia em Pernambuco, e por contribuir significativamente para o avanço da pesquisa acadêmica em nossa região.

Por fim, agradeço a todas as pessoas cujo apoio, incentivo e compreensão foram essenciais, mesmo que não mencionadas nominalmente nesta página. Cada gesto de gentileza e cada palavra de estímulo foram profundamente valorizados e contribuíram para minha jornada acadêmica.

Que este trabalho possa não apenas contribuir para o avanço do conhecimento, mas também refletir minha gratidão e apreço por todos que fizeram parte desta jornada.

A lógica é apenas o princípio da sabedoria, e não o seu fim.

Leonard Nimoy

## Resumo

Neste trabalho, estudamos um modelo computacional no qual uma comunidade é composta por espécies que competem e evoluem em um ambiente com heterogeneidade espacial, estando sujeitas a uma relação de trade-off em sua eficiência no uso de recursos. A distribuição de recursos é responsável pela heterogeneidade espacial, sendo realizada através de paisagens fractais construídas utilizando o Movimento Browniano Fracionário, que permite o ajuste da rugosidade do relevo variando o expoente de Hurst. Para compreender melhor o papel desempenhado pela heterogeneidade espacial e pela taxa de mutação das espécies na evolução dessa comunidade, investigamos a existência de correlações nas séries temporais da diversidade de espécies. Para esse fim, utilizamos a Análise de Flutuação Destendenciada Multifractal (MF-DFA), uma técnica para descrever séries temporais que podem ser caracterizadas por múltiplos expoentes de escala. Nossos resultados mostram a presença de uma anticorrelação na evolução temporal da diversidade de espécies. Não só isso, como também demonstram que essa correlação pode variar com a taxa de mutação do processo. Explorando a multifractalidade constatamos que a mesma sofre variação devido a taxa de mutação, observamos também que a mesma é devido às múltiplas correlações para flutuações pequenas e grandes no processo estocástico associado.

**Palavras-chave:** Heterogeneidade Espacial. Multifractalidade. Dinâmica Populacional

# Abstract

In this work, we study a computational model in which a community is composed of species that compete and evolve in an environment with spatial heterogeneity, subject to a trade-off relationship in their efficiency in the use of resources. The distribution of resources is responsible for spatial heterogeneity, being carried out through fractal landscapes constructed using Fractional Brownian Motion, which allows roughness adjustment by varying the Hurst exponent. To better understand the role played by spatial heterogeneity and species mutation rate in the evolution of this community, we investigated the existence of correlations in species diversity time series. To this end, we use Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA), a technique for describing time series characterized by multiple scaling exponents. Our results show the presence of an anticorrelation in the temporal evolution of species diversity. Not only that, but they also demonstrate that this correlation can vary with the process mutation rate. Exploring multifractality, we found that it suffers variation due to the mutation rate; we also observed that it is due to multiple correlations for small and significant fluctuations in the associated stochastic process.

**Keywords:** Spatial Heterogeneity. Multifractality. Population Dynamics.

# Lista de ilustrações

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – Cão-Da-Pradaria e pássaros disputam alimento. . . . .   | 1  |
| Figura 2 – Plantio de milho antes (a esquerda) e depois (a direita) da retirada de ervas daninhas. . . . .   | 2  |
| Figura 3 – Representação da curva de Koch, que exibe autossimilaridade em diferentes escalas. . . . .  | 3  |
| Figura 4 – Figura representativa do exercício da reprodução de coelhos proposto por Fibonacci, na qual o eixo da esquerda simboliza o número de meses e o da direita os pares de coelhos naquele mês, retirada de [1]. . . . .   | 5  |
| Figura 5 – Representação da catástrofe Malthusiana realizada por meio de uma simulação computacional onde o crescimento populacional cresceria em Progressão Geométrica e em contra partida a produção de alimentos cresceria em Progressão Aritmética. . . . .  | 6  |
| Figura 6 – Representação gráfica dos modelos Logístico (A) e Geométrico (B). . . . .   | 7  |
| Figura 7 – No primeiro gráfico (A) é mostrado a solução das equações 2.2. No segundo gráfico (B) é o diagrama de fase das populações de presa e predador. . . . .  | 8  |
| Figura 8 – Simulação computacional do crescimento bacteriano baseado em [2]. . . . .   | 11 |
| Figura 9 – Simulação computacional da taxa de crescimento em função da disponibilidade de recursos baseado em [2]. . . . .   | 12 |
| Figura 10 – Analogia do barril Lei de Liebig. . . . .  | 13 |
| Figura 11 – Representação de uma rede com $N = 8 \times 8$ sítios. . . . .   | 17 |
| Figura 12 – Representação dos vizinhos. . . . .  | 18 |
| Figura 13 – Representação da condição de contorno para os vizinhos. . . . .  | 18 |
| Figura 14 – Representação da distribuição dos recursos para uma rede de $L = 512$ com expoente de Hurst indicado nas legendas de cada gráfico. . . . .   | 19 |
| Figura 15 – Representação do processo de mutação. . . . .  | 21 |
| Figura 16 – Simulação computacional da função de reprodução. Foram simulados três casos: o primeiro denominado de caso geral foi simulado sem o Trade Off (TO) como esquematizado na Figura 15; no segundo simulamos o caso especial em que é gerada uma espécie generalista; e o terceiro caso em que foi aplicado um TO. . . . . | 22 |
| Figura 17 – Representação do processo de mutação após a implementação do TO. . . . .   | 23 |
| Figura 18 – Fluxograma do Programa computacional. . . . .  | 24 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 19 – Variação diária das ações da Vale do Rio Doce (A) representando uma série ruidosa e valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce (B), representando uma série integrada, obtidas via biblioteca <code>yfinance</code> da linguagem de programação python. . . . .                    | 25 |
| Figura 20 – Série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce, dividida em caixas com descarte de pontos no final da série. . . . .  | 26 |
| Figura 21 – Série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce, dividida em caixas com descarte de pontos no início da série. . . . .   | 26 |
| Figura 22 – Mil pontos iniciais da série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce, representando uma caixa, na qual é mostrado os ajustes polinomiais e o seu respectivo grau. . . . .  | 27 |
| Figura 23 – Gráfico representante da Eq 3.9, numa escala log-log com alguns valores de $q$ selecionados como mostra o gráfico. . . . .  | 28 |
| Figura 24 – Gráfico do expoente de hurst generalizado em função dos momentos, $h(q) \times q$ , para a série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce. . . . .  | 29 |
| Figura 25 – Gráfico do expoente de escala multifractal em função dos momentos, $\tau(q) \times q$ , para a série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce. . . . .  | 30 |
| Figura 26 – Gráfico do espectro de singularidade em função do fator de intensidade de singularidade, $D(\alpha)$ em relação a $\alpha$ , para a série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce. . . . .   | 30 |
| Figura 27 – Séries temporais da média do número de espécies obtidas através da dinâmica contabilizando o número de espécies presentes na rede a cada passo de tempo. Em cada Figura variamos a taxa de mutação $\nu = 10^{-\omega}$ . Os parâmetros $H$ e $L$ são especificados nas legendas. . . . . | 33 |
| Figura 28 – Séries temporais do número obtidas através da dinâmica contabilizando o número de espécies presentes na rede a cada passo de tempo. Em cada figura variamos a taxa de mutação $\nu$ . Os parâmetros $H$ e $L$ são especificados nas legendas. . . . .                                     | 34 |
| Figura 29 – Série temporal da taxa selic, obtidas via biblioteca <code>bcbr</code> da linguagem de programação python, por meio de uma API que coleta dados públicos disponibilizados pelo banco central. . . . .   | 35 |
| Figura 30 – Dados selecionados no período de 22/03/2018 a 20/07/2019 da série temporal da taxa selic, obtidas via biblioteca <code>bcbr</code> da linguagem de programação python, por meio de uma API que coleta dados públicos disponibilizados pelo banco central. . . . .                         | 36 |

- Figura 31 – Gráfico da lei de potência 3.9 obtido pelo método Detrended Fluctuation Analysis (DFA) aplicado à série temporal da diversidade de espécies. Com um expoente de Hurst fixo em  $H = 0,01$ , os tamanhos dos lados da rede  $L$  são descritos na legenda de cada Figura. . . . . 38
- Figura 32 – Gráficos de correlação em função do logaritmo na base dez da taxa de mutação  $\nu$ , obtidos através do método DFA aplicado à série temporal da diversidade de espécies. O expoente de Hurst é mantido constante em  $H = 0.01$ , com os tamanhos de lado da rede  $L$  indicados na legenda de cada gráfico. . . . . 39
- Figura 33 – Gráficos do expoente de Hurst generalizado em função dos momentos,  $h(q) \times q$ , para a série temporal da diversidade de espécies. O expoente de Hurst é fixo em  $H = 0.5$  e os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico. . . . . 40
- Figura 34 – Gráfico do expoente de escala multifractal em função dos momentos,  $\tau(q) \times q$ , para a série temporal da diversidade de espécies. Com expoente de Hurst fixo em  $H = 0.5$ , os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico. . . . . 41
- Figura 35 – Gráfico do espectro de singularidade em função do fator de intensidade de singularidade,  $D(\alpha)$  em relação a  $\alpha$ , para a série temporal da diversidade das espécies. Com expoente de Hurst fixo em  $H = 0.01$ , os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico. 42
- Figura 36 – Gráficos da variação da intensidade de singularidade  $\Delta\alpha$  em função do logaritmo da taxa de mutação para a série temporal da diversidade das espécies. Com expoente de Hurst fixo em  $H = 0.5$ , os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico. . . . . 43
- Figura 37 – Embaralhamento de série para a série com  $\nu = 10^{-4,5}$ ,  $L = 64$  e  $H = 0.1$ . 44
- Figura 38 – Gráfico da lei de potência 3.9 obtido pelo método DFA aplicado à série temporal da diversidade de espécies, para vários expoentes de mutação  $\omega$  descritos nas legendas internas de cada gráfico. O expoente de Hurst  $H = 0.5$  e os tamanhos dos lados da rede  $L$  estão descritos na legenda de cada figura. . . . . 54
- Figura 39 – Gráficos do expoente de Hurst generalizado em função dos momentos,  $h(q) \times q$ , para a série temporal da diversidade de espécies, para vários expoentes de mutação  $\omega$  descrito nas legendas internas de cada gráfico. O expoente de Hurst  $H = 0.5$  e os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico. . . . . 55

- Figura 40 – Gráficos do expoente de escala multifractal em função dos momentos,  $\tau(q) \times q$ , para a série temporal da diversidade de espécies, para vários expoentes de mutação  $\omega$  descritos nas legendas internas de cada gráfico. O expoente de Hurst e tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico. . . . . 56
- Figura 41 – Gráficos do espectro de singularidade em função do fator de intensidade de singularidade,  $D(\alpha)$  em relação a  $\alpha$ , para a série temporal da diversidade de espécies, para vários expoente de mutação  $\omega$  descritos nas legendas internas de cada gráfico. O expoente de Hurst e tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico. . . . . 57

# Lista de quadros

# Lista de tabelas

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1 – Parâmetros das séries temporais. . . . .    | 32 |
| Tabela 2 – Tamanhos de caixas para $L = 64$ . . . . .  | 37 |
| Tabela 3 – Tamanhos de caixas para $L = 128$ . . . . . | 37 |
| Tabela 4 – Tamanho de caixas para $L = 256$ . . . . .  | 37 |

# Lista de abreviaturas e siglas

**MBF** Movimento Browniano Fracionário

**KMS** Constante de Meia Saturação

**TO** Trade Off

**FPR** Função Probabilidade de Reprodução

**MF-DFA** Multifractal Detrended Fluctuation Analysis

**DFA** Detrended Fluctuation Analysis

**EDO** Equações Diferenciais Ordinárias

**WTMM** Wavelet Transform Modulus Maxima

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                         | <b>1</b>  |
| 1.1      | Introdução                                | 1         |
| 1.2      | Divisão da dissertação                    | 3         |
| <b>2</b> | <b>REVISÃO DA LITERATURA</b>              | <b>5</b>  |
| 2.1      | Radiação adaptativa                       | 10        |
| 2.2      | Reprodução                                | 10        |
| 2.3      | Lei de Liebig                             | 13        |
| 2.4      | Trade-off's                               | 13        |
| 2.5      | Fractalidade em séries temporais          | 14        |
| <b>3</b> | <b>MODELO COMPUTACIONAL</b>               | <b>17</b> |
| 3.1      | Ecosistema                                | 17        |
| 3.1.1    | A Rede                                    | 17        |
| 3.1.2    | Sítio e vizinhos                          | 17        |
| 3.1.3    | Distribuição de recursos                  | 18        |
| 3.2      | Indivíduo                                 | 20        |
| 3.2.1    | Morte                                     | 20        |
| 3.2.2    | Reprodução                                | 20        |
| 3.2.3    | Mutação                                   | 21        |
| 3.3      | Dinâmica                                  | 23        |
| 3.3.1    | Parâmetros do sistema                     | 23        |
| 3.3.2    | Programa computacional                    | 23        |
| 3.4      | MF-DFA                                    | 25        |
| <b>4</b> | <b>RESULTADOS</b>                         | <b>32</b> |
| 4.1      | Série temporal                            | 32        |
| 4.2      | Parâmetros do MF-DFA                      | 35        |
| 4.2.1    | Tabelas de parâmetros                     | 37        |
| 4.3      | DFA                                       | 38        |
| 4.4      | MF-DFA: Análise de Multifractalidade      | 40        |
| 4.4.1    | Expoente de Hurst generalizado $h(q)$     | 40        |
| 4.4.2    | Expoente de escala multifractal $\tau(q)$ | 41        |
| 4.4.3    | Espectro de singularidade $D(\alpha)$     | 42        |
| <b>5</b> | <b>CONCLUSÃO</b>                          | <b>46</b> |

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
|            | <b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .                       | <b>48</b> |
|            | <b>APÊNDICE A – RESULTADOS</b> . . . . .           | <b>54</b> |
| <b>A.1</b> | <b>Resultados <math>F_2(s)</math></b> . . . . .    | <b>54</b> |
| <b>A.2</b> | <b>Resultados <math>h(q)</math></b> . . . . .      | <b>55</b> |
| <b>A.3</b> | <b>Resultados <math>\tau(q)</math></b> . . . . .   | <b>56</b> |
| <b>A.4</b> | <b>Resultados <math>D(\alpha)</math></b> . . . . . | <b>57</b> |

# 1 Introdução

## 1.1 Introdução

A ecologia, sendo a ciência que estuda o relacionamento do ser vivo com o meio ambiente [3], tem uma das suas áreas de pesquisa como sendo a biodiversidade, que pode ser definida como uma medida de uma dimensão instrumentalmente importante dos sistemas biológicos [4]. Essa, por sua vez, vem sendo alvo de um longo debate no âmbito ambientalista devido a sua importância para o manejo e sobrevivência de espécies ameaçadas de extinção [5]. Com isso, temos como objetivo entender alguns aspectos de uma medida ambiental, que é o número de espécies em um determinado ambiente ao longo do tempo.

Podemos encarar o estudo da biodiversidade por meio das relações ecológicas, as interações entre os seres e também com os recursos disponíveis no ambiente. Não é de nosso interesse explorar todas as relações existentes neste trabalho, pois o estudo se limita a indivíduos do mesmo nível trófico<sup>1</sup>, definimos então que a relação ecológica alvo será a competição. Muitas vezes a competição pode ser compreendida pelo senso comum de maneira semelhante apresentada na Figura 1. Como explicado por Townsend na seção 3.5 de sua obra [3], o que ocorre é uma competição por recursos na qual os indivíduos não necessariamente se envolvem em disputas corporais diretas e predatória, para monopolizar esses recursos.



Figura 1 – Cão-Da-Pradaria e pássaros disputam alimento.  
Fonte: Tad Arensmeier, 2007.

Como bom exemplo podemos citar as ervas daninhas na produção de milho, pois como afirma Gilmar Esmerini [6] "*A diminuição do rendimento na cultura do milho devido*

---

<sup>1</sup> Posição na cadeia alimentar

à competição estabelecida com as plantas daninhas pode atingir até 70%, dependendo da espécie, do estágio fenológico da cultura, do grau de infestação, do tipo de solo e das condições climáticas reinantes no período". Como ilustrado na Figura 2, trata-se de uma competição pelos nutrientes da terra e não de um caso de parasitismo como nas plantas exemplificadas em [7].



Figura 2 – Plantio de milho antes (a esquerda) e depois (a direita) da retirada de ervas daninhas.

Fonte: Retirada da reportagem [6].

Contudo, foi com Darwin [8] que começamos a adquirir uma visão mais esclarecedora das raízes fundamentais da biodiversidade. À medida que as pesquisas avançaram, a compreensão acerca de temas como evolução, mutação, hereditariedade e adaptação [9, 10] trouxeram respostas sobre a causa da diversidade das espécies. Entender como a variabilidade causada pelas mutações atuam sobre um ecossistema, bem como seu relacionamento com diferentes tipos de recursos, por meio do processo da radiação adaptativa, pode ser de grande contribuição para o estudo da biodiversidade.

A natureza apresenta certos padrões seja em sua anatomia [11], distribuições [12] ou formato costeiros [13]. Podemos assim dizer que existe uma certa complexibilidade, e algumas dessas apresentam uma auto-similaridade sobre uma determinada escala. A esse padrão ou complexibilidade damos o nome de fractalidade. Um exemplo clássico da fractalidade é a curva de Koch (Figura 3), que pode ser vista como um floco de neve que, quando aumentamos a escala nas suas bordas vemos um mesmo padrão repetidamente. Pode-se expandir a teoria para uma multifractalidade, pois partes diferentes do objeto em estudo podem conter diferentes graus de auto-similaridade e oferece ferramentas matemáticas poderosas para descrever e compreender padrões complexos que ocorrem em diversos contextos, desde figuras a séries temporais.

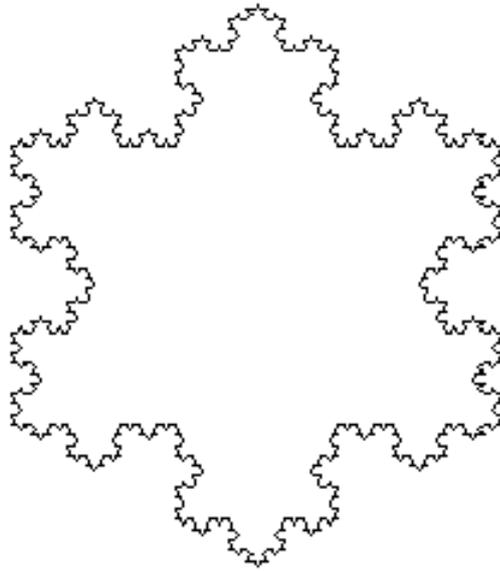


Figura 3 – Representação da curva de Koch, que exhibe autossimilaridade em diferentes escalas.

Fonte: Tad Arensmeier, 2007 .

Visamos nessa dissertação simular um ambiente com competição por recurso, em um ambiente com heterogeneidade na distribuição de recursos. Investigaremos a variação temporal da diversidade das espécies por meio de séries temporais. Para isso utilizaremos um método de análise multifractal, o Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (**MF-DFA**). Também faremos uma análise de correlações dessas séries utilizando o método **DFA**, *em que foi desenvolvido um código em Python para a implementação do mesmo. Assim como o código do MF-DFA, os gráficos contidos nessa dissertação foram realizados como produção própria com a linguagem de programação Python. Para a realização da dinâmica foi produzido um código em Fortran 2018, devido ao seu poder computacional, para assim termos uma otimização do tempo.*

## 1.2 Divisão da dissertação

Esta dissertação está dividida em cinco capítulos, a saber: Introdução, Revisão de Literatura, Modelo Computacional, Resultados e Considerações Finais.

No Capítulo 1 - Introdução, apresenta-se ao leitor um breve esboço do que fundamenta e se trata esta dissertação.

No Capítulo 2 - Revisão de Literatura, não se resume apenas a um estado da arte, mas se dedica a justificar as metodologias utilizadas. Além disso, serão apresentadas outras abordagens em dinâmica populacional, acompanhadas de uma breve introdução ao

método analítico adotado.

No Capítulo 3 - Modelo Computacional, encontra-se o cerne desta dissertação. Aqui, não apenas o modelo computacional é descrito, mas também são apresentados os conceitos que o embasam. Vale destacar que esse capítulo será dividido em duas partes: a primeira abordará o modelo de dinâmica populacional, responsável pela geração do objeto de pesquisa; a segunda explorará o método de análise proposto, [MF-DFA](#).

No Capítulo 4 - Resultados, serão exibidos os resultados obtidos, acompanhados de uma breve explicação sobre cada um deles.

No Capítulo 5 - Considerações Finais, serão apresentadas as conclusões dos resultados.

## 2 Revisão da Literatura

Podemos datar o pensamento de um manejo populacional desde a antiguidade, seja para remanejar tropas militares, controlar doenças ou até mesmo controle alimentar de uma região. No entanto, na modernidade podemos pontuar o pequeno exercício proposto por Fibonacci em seu livro Liber Abaci :

*Colocado um casal de coelhos num local confinado e mesmo com reproduções de casais mensalmente e seus descendentes também, como estimar a população de coelhos do ambiente em 1 ano ?*

Pode-se observar a solução para os 5 primeiros meses esquematizado na Figura 4. Esse pequeno exemplo pode ilustrar duas coisas: uma delas é o que hoje conhecemos como uma sequência Fibonacci e a outra é a dinâmica populacional, que de forma simples pode ser representada pelo ramo da ciência que estuda as variações temporais de características das populações biológicas.

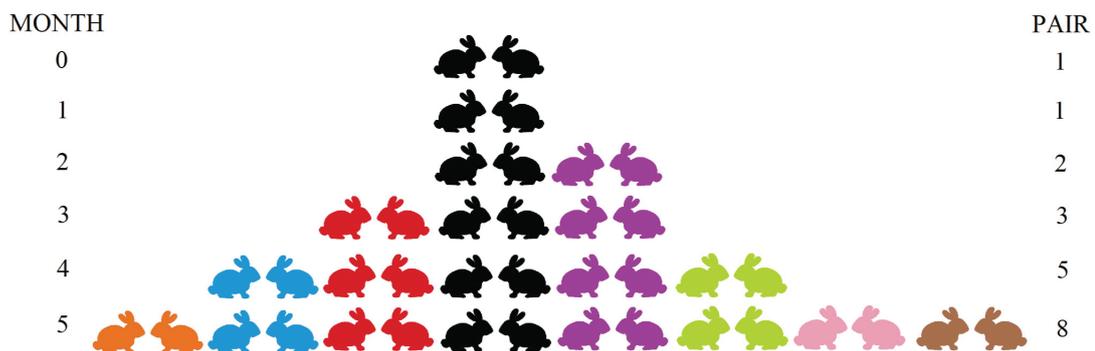


Figura 4 – Figura representativa do exercício da reprodução de coelhos proposto por Fibonacci, na qual o eixo da esquerda simboliza o número de meses e o da direita os pares de coelhos naquele mês, retirada de [1].

Muito embora o primeiro exemplo citado leve unicamente em consideração o tamanho populacional, desde os primórdios, essa não é a única característica considerada ao estudar a dinâmica populacional. Podemos mencionar aqui o estudo de [14], que analisou a mortalidade e natalidade de uma população no século XVII. Embora esse dado seja apenas um estudo, a sua importância reside no próprio estudo, não sendo apenas isso que mostram as evidências históricas, nas quais o trabalho serviu como base para [15] incorporar os primórdios da taxa de natalidade, probabilidade de morte em cada idade, bem como influências na economia, como a equação para seguro de vida usando às taxas de mortalidade.

Muitos atribuem a Thomas Malthus ser o pai dessa área, sendo seu exemplo do

tamanho populacional e produção de alimentos sua teoria mais conhecida. No entanto, como mostra [16], a contribuição de Malthus trata-se muito mais de um legado do que um fato. Por exemplo, a ideia de que o crescimento da população seguiria um crescimento geométrico não foi algo criado por ele, mas sim já tinha sido teorizado por Euler [17]. No entanto, é inegável a sua contribuição em forma de inspiração para as gerações seguintes.

A denominada catástrofe Malthusiana é uma representação das constatações de Malthus sobre o crescimento populacional e alimentos, como mostra a Figura 5. No entanto, essa análise se torna um pouco limitada, visto que desta forma separamos essas duas variáveis. Como foi mostrado ao longo da história, a capacidade de produção de alimentos não seguiu os modelos estipulados por Malthus, devido à revolução agrícola e à criação de fertilizantes e defensivos agrícolas [18]. Logo, é de se pensar que essas duas variáveis devem andar juntas: o crescimento populacional e os recursos presentes. Ao pensar nesse caso, o matemático belga Pierre-François Verhulst, em [19], faz uma pequena indagação:

“Como se sabe, o célebre Malthus estabeleceu como princípio que a população humana tende a aumentar em progressão geométrica, de modo a duplicar após um determinado período, por exemplo, a cada vinte e cinco anos. Esta proposição é incontestável, se negligenciarmos a dificuldade cada vez maior de obter provisões depois de a população ter adquirido um certo grau de aglomeração; ou [se negligenciar] os recursos de que a população recorre para o seu crescimento, mesmo quando a sociedade ainda está na sua infância - tais como uma maior divisão do trabalho, a existência de um governo regular e os meios de defesa que asseguram a tranquilidade pública, etc.”

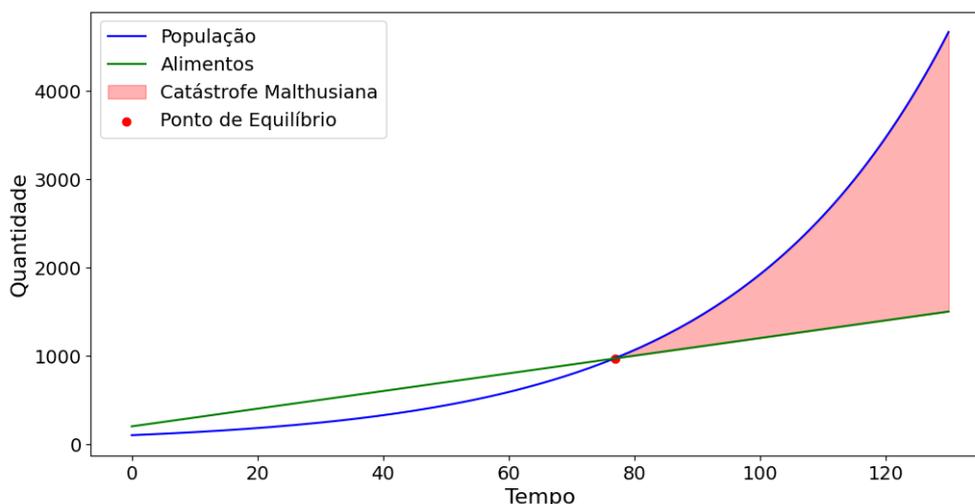


Figura 5 – Representação da catástrofe Malthusiana realizada por meio de uma simulação computacional onde o crescimento populacional cresceria em Progressão Geométrica e em contra partida a produção de alimentos cresceria em Progressão Aritmética.

O que levou à criação da Equação logística de Verhulst,

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \quad (2.1)$$

onde a variação da população depende de uma taxa de crescimento  $r$ , do número populacional  $P$  no instante de tempo  $t$  e impõe uma taxa de carga  $K$ , que representa a capacidade populacional do sistema, pode ser comparado com a progressão geométrica, como mostra a Figura 6, visto que a mesma introduz um limitador no crescimento de populações. A eficácia do método pode ser aferida em casos experimentais, como [20], no entanto, sua maior utilização e exploração vieram décadas depois, com a Equação de Lotka-Volterra,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy, \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y, \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que

$x$ : População da presa;

$y$ : População do predador;

$\frac{dx}{dt}$ : Taxa de variação da população da presa em relação ao tempo;

$\frac{dy}{dt}$ : Taxa de variação da população do predador em relação ao tempo;

$\alpha$ : Taxa de crescimento intrínseca da presa na ausência de predadores;

$\beta$ : Taxa de predação, ou seja, quanto a presa é capturada e consumida pelo predador por unidade de tempo;

$\delta$ : Taxa de reprodução dos predadores por unidade de presa consumida;

$\gamma$ : Taxa de mortalidade intrínseca dos predadores na ausência de presas.

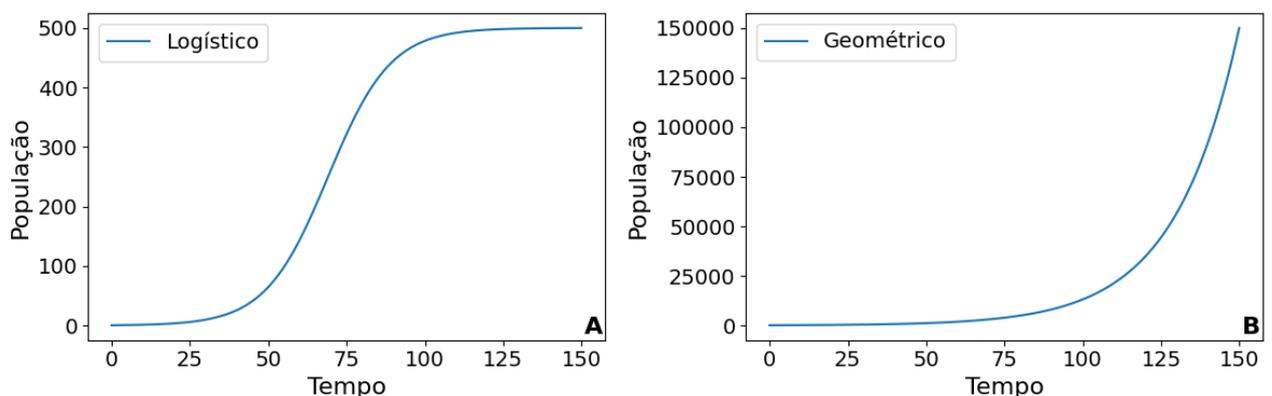


Figura 6 – Representação gráfica dos modelos Logístico (A) e Geométrico (B).

Embora o principal estudo de Alfred James Lotka tenha sido em relação à fertilidade da população masculina e suas consequências na pirâmide populacional, ele também desenvolveu estudos no campo de pesquisa da dinâmica populacional voltados agora para uma relação ecológica existente no sistema, como a predação. Em seu exemplo inicial, analisou a interação entre herbívoros e plantas, ou recurso e consumidor como mostra [17].

Ao analisar o sistema, percebeu que, mesmo podendo variar ao longo do tempo, o sistema chega a um ponto de equilíbrio, mesmo podendo variar ao seu redor, que ele denominou de estado estacionário, conforme mostra a Figura 7. Na mesma época, o físico Vito Volterra, ao analisar dados de peixes, chegou a uma Equação semelhante à de Lotka, o que fez ambos darem o nome a tal equação de equações de Lotka-Volterra, como mostra a Equação 2.2, onde demonstra a interação de uma presa e um unico predador.

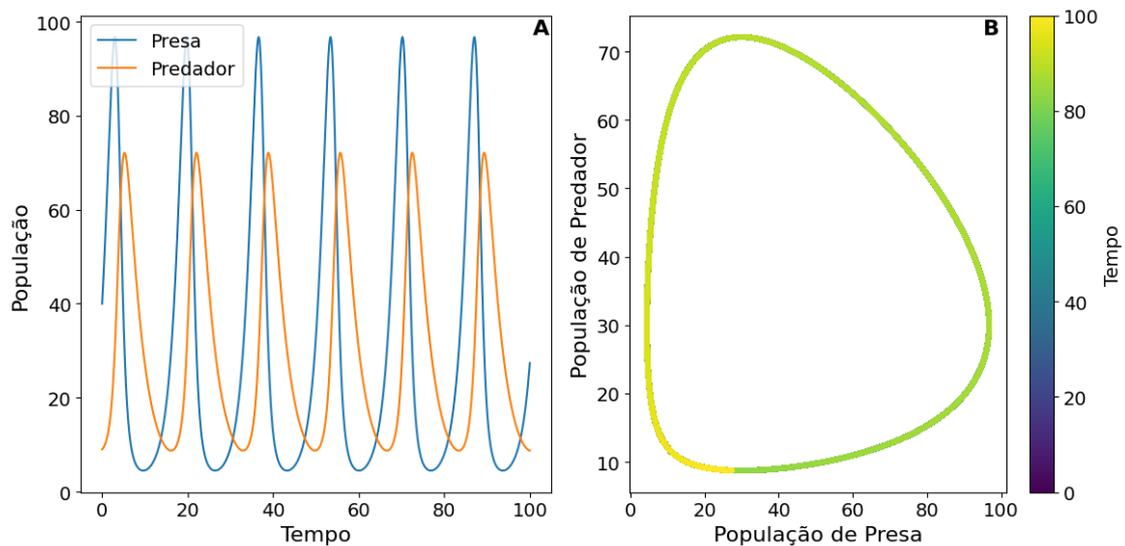


Figura 7 – No primeiro gráfico (A) é mostrado a solução das equações 2.2. No segundo gráfico (B) é o diagrama de fase das populações de presa e predador.

Caso utilizássemos as equações de Lotka-Volterra para modelar um sistema no qual houvesse evolução, a criação de novas espécies implicaria em um grande número de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Podemos verificar o caso da Equação 2.3, que modela um sistema com 4 presas e 2 predadores, o que gerou 7 equações. Quando pensamos em um sistema com altas taxas de mutação esse número pode chegar muito facilmente a mais de cem presas no sistema, o que teria um custo computacional muito grande. Além do mais, com essas equações não poderíamos acrescentar a importância da heterogeneidade do ambiente no processo evolutivo.

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \alpha_1 x_1 - \beta_{11} x_1 y_1 - \beta_{12} x_1 y_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \alpha_2 x_2 - \beta_{21} x_2 y_1 - \beta_{22} x_2 y_2 \\
\frac{dx_3}{dt} &= \alpha_3 x_3 - \beta_{31} x_3 y_1 - \beta_{32} x_3 y_2 \\
\frac{dx_4}{dt} &= \alpha_4 x_4 - \beta_{41} x_4 y_1 - \beta_{42} x_4 y_2 \\
\frac{dx_5}{dt} &= \alpha_5 x_5 - \beta_{51} x_5 y_1 - \beta_{52} x_5 y_2 \\
\frac{dy_1}{dt} &= \delta_{11} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) y_1 - \gamma_1 y_1 \\
\frac{dy_2}{dt} &= \delta_{21} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) y_2 - \gamma_2 y_2
\end{aligned} \tag{2.3}$$

A dinâmica populacional pode advir de vários fatores causadores como pandemias [21], êxodo [22], fatores climáticos [23], dentre outros. Em nosso estudo buscamos simular um ambiente com competição, conceito este advindo das relações ecológicas. Quando mencionamos relações ecológicas, nos referimos à maneira de interação entre os meios bióticos e abióticos, a qual se desdobra em vários tipos como Comensalismo, Mutualismo, Parasitismo, Predatismo, Competição, etc. [24], fazendo assim ocorrer uma certa dinâmica em um ambiente, seja por extinção e criação de novas espécies. Dentre os modelos de relações ecológicas, é necessário saber diferenciar dois modelos: Predatismo e Competição. Embora em conceitos gerais ambos se pareçam, encaramos Predatismo como um sistema em que existe uma espécie que poderá utilizar-se de outra como alimento. Já na Competição, a espécie se alimenta de um recurso presente no ambiente. À primeira vista, parece o mesmo conceito, porém, podemos citar um exemplo de predatismo como um lobo e uma ovelha coexistindo no mesmo ambiente, o que vai gerar uma clara predação. No entanto, se introduzida outra espécie de lobo do mesmo nível de predação já existente, a ovelha passa a ser um recurso a ser disputado entre os dois predadores, caracterizando uma relação de competição. De modo semelhante, podemos aplicar isso às plantas em uma floresta, que em conjunto disputam os recursos naturais presentes no solo, assim formando um dado recurso no ambiente.

Há uma gama de modelos de dinâmica populacional existentes, mesclando diversas abordagens e métodos de análises. Buscamos entender as características e propriedade na diversidade temporal de um dado ecossistema. Isso nos leva à utilização de um modelo computacional desenvolvido por Sara Lucia Castillo Daza em sua tese de Doutorado [25], no qual utiliza-se uma modelagem baseada em simulações de um ecossistema com estrutura espacial na qual as espécies competem por recursos num ambiente heterogêneo. A sua dinâmica incorpora aspectos biológicos como morte e reprodução, na qual a radiação adaptativa tem um papel fundamental na introdução da mutação e conseqüentemente de evolução, dando origem a diversidade de espécies.

## 2.1 Radiação adaptativa

Como introduzido por Darwin em sua mais conhecida obra [8], a radiação adaptativa é um conceito que relaciona a diferença entre espécies com a característica dos recursos e a adaptação para a utilização do mesmo. No entanto, aqui se faz necessário uma ressalva para não haver entendimento como algo próximo a um Lamarckismo<sup>1</sup>. Entende-se que ao nascer com uma dada habilidade ou modificação, o indivíduo tem naturalmente uma facilidade em se desenvolver e reproduzir em um ambiente com um dado recurso. Por exemplo, pássaros com bicos diferentes apresentam alimentações diferentes [27], essa diferença se dá não por uma adaptação desenvolvida ao longo da vida e sim por uma adaptação proveniente de uma característica herdada dos antepassados ou proveniente de uma alteração genética por um processo de mutação, a qual diferencia o mesmo dos demais da região. A aplicabilidade da radiação adaptativa vem sendo testada em uma gama de modelos, sejam eles matemáticos, computacionais ou experimentais com populações de diversas espécies [2, 28, 29], pois entende-se que essa relação entre espécies e ambiente [30–32] tem grande importância para o manejo ambiental e a sua preservação.

Segundo Darwin [8], a evolução se dá por meio de uma relação espécie-recurso. É de extrema importância uma maneira consistente a qual se maneja esse recurso em suas quantidades e distribuição. No modelo proposto em [25], a distribuição de recurso se dá utilizando o Movimento Browniano Fracionário (**MBF**), no qual a quantidade de recurso em um dado sítio está relacionada com a quantidade daquele recurso nos sítios vizinhos (veremos mais detalhes sobre a implementação do **MBF** na seção 3.1.3). A escolha desse método se dá pela possibilidade de controle da correlação entre os incrementos e pela sua larga usabilidade na literatura como forma de distribuição [33]. Por outro lado, o **MBF** mantém a heterogeneidade do ambiente, fator esse muito importante no manejo e manutenção de espécies como mostra [34, 35].

## 2.2 Reprodução

Em nosso trabalho, conforme previamente delineado, almejamos incorporar os princípios biológicos fundamentais em nossa simulação computacional. No entanto, deparamo-nos com a variedade de modelos de reprodução e crescimento populacional à nossa disposição. Estes abrangem desde a renomada Equação Logística até as complexas Equações de Lotka-Volterra. Todavia, para atender às necessidades de nossa pesquisa e estabelecer uma relação adequada com os recursos disponíveis em nossa rede, concluímos que o Modelo de Monod se mostra a escolha mais pertinente e apropriada.

---

<sup>1</sup> Teoria criada no séc. XIX, pela qual se explica a evolução dos seres vivos pela influência das variações do meio sobre o comportamento e sobre os órgãos, o lamarckismo supõe a herança dos caracteres adquiridos [26].

Criada pelo bioquímico Jacques Monod, ganhador do Prêmio Nobel de 1965, em seu artigo [2], demonstra a relação do crescimento populacional de microbactérias em relação ao substrato, ou seja, em relação aos recursos disponíveis no ambiente. Ao analisar o crescimento da população, Monod observou que o crescimento das populações se dividiam em 6 fases como mostra a Figura 8 sendo elas :

- Fase de Latência: Esta fase inicial é caracterizada pela ausência de crescimento populacional.
- Fase de Aceleração: Nesta etapa, o crescimento populacional começa a se manifestar.
- Fase Exponencial: Aqui, o crescimento atinge seu ponto mais acentuado e notável.
- Fase de Retardo: Esta fase marca o início da desaceleração do crescimento, caminhando em direção a um estado estacionário.
- Fase de Estagnação: Trata-se de uma fase estacionária, na qual os indivíduos tendem a saturar os recursos disponíveis no ambiente.
- Fase de Declínio: É a fase de declínio na população, resultado do esgotamento dos recursos no ambiente.

Essas fases podem variar ou mesmo desaparecer dependendo do sistema, como a Fase de Latência que pode ser mínima com alta taxa de reprodução ou a ausência da Fase de Declínio com recursos em constante reposição.

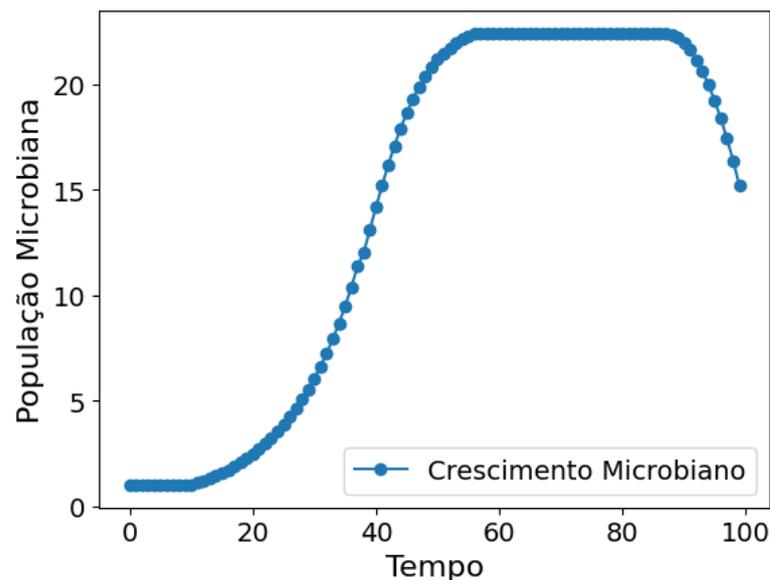


Figura 8 – Simulação computacional do crescimento bacteriano baseado em [2].

Analisando isso, Monod conjecturou que o crescimento pode ser dado por uma EDO de primeira ordem dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \mu X. \quad (2.4)$$

Como o crescimento da população depende dos recursos, ao analisar o termo  $\mu$  da Equação 2.4, podemos interpretá-lo como a taxa de crescimento ou taxa de reprodução do sistema. Ao investigar essa taxa de crescimento em relação à concentração de recursos disponíveis, conforme ilustrado na Figura 9, Monod afirmou em seu trabalho [2] que é conveniente e lógico adotar uma Equação hiperbólica para descrever esse sistema. Portanto, obtemos a Equação de Monod:

$$\mu = \mu_{\max} \cdot \frac{R}{K + R}. \quad (2.5)$$

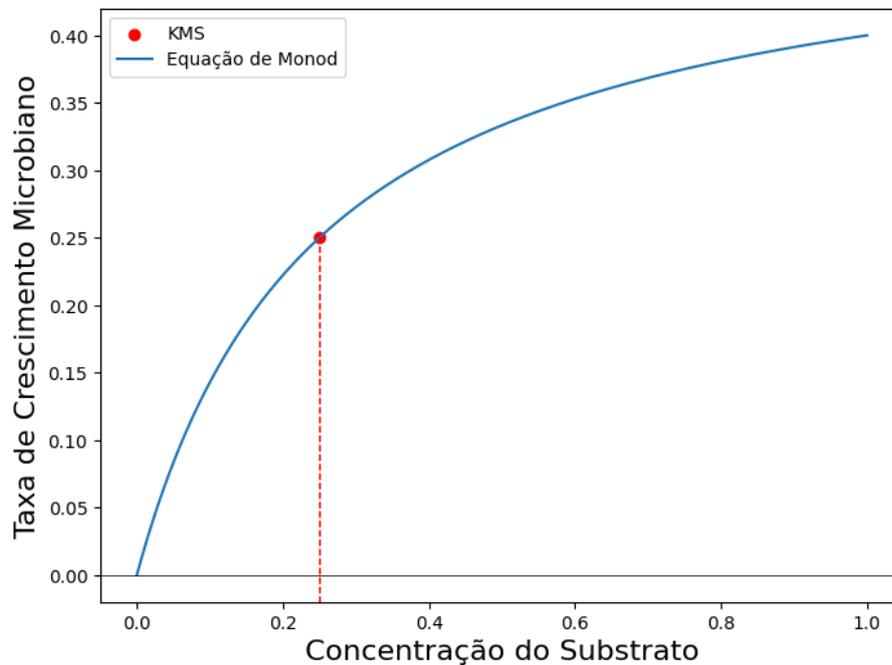


Figura 9 – Simulação computacional da taxa de crescimento em função da disponibilidade de recursos baseado em [2].

Uma contribuição importante da Equação de Monod é a introdução da constante  $K$  que, fazendo uma rápida manipulação onde  $R = K$ , verificamos que essa constante representa o valor necessário do substrato para limitar ou reduzir em 50% a taxa máxima de crescimento, como explica [36], assim a denominamos de Constante de Meia Saturação (**KMS**).

A **KMS** é um elemento fundamental para o nosso estudo, visto que a mesma expressa o quão hábil a população é boa na utilização de um determinado recurso. Indo além, como mostra [37, 38], temos **KMS** diferentes para diferentes espécies. Logo, em nosso caso optamos por definir uma espécie como sendo o grupamento de indivíduos que possuem as mesmas **KMS**.

## 2.3 Lei de Liebig

Podemos representar a Lei de Liebig por uma simples analogia do barril de tábuas, no qual temos um barril com tábuas de diferentes tamanhos, e ao tentar encher tal barril percebemos que não importa o tamanho das tábuas maiores pois percebemos que o nível da água sempre ficará no topo da menor tábua, ou seja, temos um fator limitante de crescimento no menor ente existente no sistema (a Figura 10 permite uma melhor visualização deste exemplo).

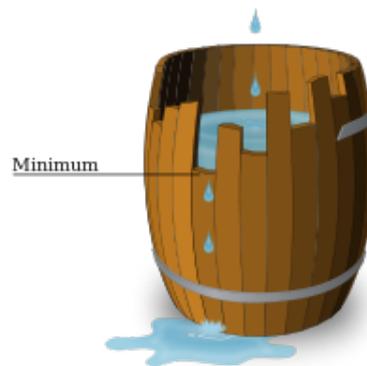


Figura 10 – Analogia do barril Lei de Liebig.

Muito embora a Lei de Liebig seja enunciada como: “O crescimento de determinado sistema biológico depende da quantidade mínima de recursos presente para sua reprodução” seja realmente verdade, falta uma parte do enunciado a qual é proposto por [39]. Assim a frase completa seria “O crescimento de determinado sistema biológico depende da quantidade mínima de recursos presente ou grau de condição que existe na menor proporção daquela necessária para a reprodução”. A vista de mais desatentos isso pode ser meramente semântico porém será de bastante utilidade na subseção 3.2.2.

Embora a Lei de Liebig tenha sido formulada para plantas, temos análises e estudos que se utilizam da mesma para trabalhos em espécies e comunidades em geral [40–42]. Como levantado por Q. Paris [43], muitas das críticas a lei tratam-se de mera falta de entendimento na interpretação da mesma por alguns. Vale ressaltar que a mesma é comumente utilizada para cálculos sobre a Equação Michaelis-Menten [44] que dadas as proporções se assemelha a lei de Monod.

## 2.4 Trade-off's

Antes de expor o conceito a seguir, convido o leitor a um momento de experimento mental. Ao longo da vida, é comum deparar-se com situações em que existem limitações naturais em detrimento de outra ação, como, por exemplo, o exercício físico e o fôlego ou

a direção de veículos e o uso de aparelhos eletrônicos ao mesmo tempo<sup>2</sup>. Uma vez que ao executar uma, a outra perde em eficiência [45], ou até mesmo os benefícios de uma medicação e seus feitos colaterais, todos os exemplos citados seguem a mesma lógica: a limitação de um sistema binário em relação a um de seus elementos. E é essa limitação que trataremos.

Paul Samuelson, agraciado com o Nobel de Economia em 1970, introduziu o conceito do trade-off **TO** como um elemento de escolha mediante a uma dada limitação. Tem-se como o exemplo clássico de Samuelson entre produção de canhões ou manteiga. Embora inicialmente pareça esdrúxulo trata-se da gestão do dinheiro público, por um lado poderia-se subsidiar a produção de manteiga de um país com todo o recurso público disponível, por outro lado, faltará verba para a proteção territorial. Podemos trazer essa analogia para um exemplo brasileiro na forma da PEC 241/2016, mais conhecida como teto de gastos, que determina um limite para as contas públicas, logo as escolhas de alocação de recursos se tornam inevitáveis. Então pode-se entender que **TO** trata-se de uma alocação de esforço ou energia devido a uma limitação do sistema.

Em termos biológicos, o **TO** atua como um limitador na alocação de energia para processos fisiológicos [46], devido ao fato que os organismos vivos não são bons em todas as suas ações e utilizações de recursos. Podemos citar como exemplo a imunidade durante o estado de reprodução de organismos, como mostrado no casos dos insetos [47] ou em plantas [48].

Como será mostrado na subseção 3.2.2, utilizamos um modelo mais simples de **TO**, sendo este fixo espacialmente e temporalmente, ou seja, independente do local, indivíduo ou tempo. O **TO** permanece imutável nesse modelo pois não é de nosso interesse nesta dissertação discutir a ação do **TO** sobre o nosso sistema, mesmo sabendo que o mesmo pode provocar mudanças significativas nos resultados. Porém é interessante mencionar que há modelos de **TO** não fixos, como mostra [49]. Os motivos pelos quais se torna necessário a utilização do **TO** também serão discutidos na subseção 3.2.2.

## 2.5 Fractalidade em séries temporais

Nos resultados apresentados em [25], demonstra-se o comportamento da diversidade de espécies ao longo do tempo. Com isso, é realizada uma análise utilizando exponenciais estendidas na qual foi verificada que a diversidade de espécies carrega uma memória. A partir desses resultados, buscamos entender que tipo de memória é essa e explorar novas propriedades do sistema. Alguns estudos incorporam, juntamente às exponenciais, estudos sobre correlações de longo alcance [50, 51], o que nos levou a procura de um método

---

<sup>2</sup> Vale ressaltar que isso configura uma infração de trânsito gravíssima pelo Art. 252 do Código de Trânsito Brasileiro.

que pudesse dar base para a nossa pesquisa. Um dos métodos para análise desse tipo em séries temporais que vem sendo utilizado recorrentemente na literatura é conhecido como **MF-DFA**, devido à sua capacidade de detecção de diferentes correlações de longo alcance para flutuações de amplitudes diversas em séries temporais com múltiplos regimes. Podemos verificar em alguns artigos seu estudo junto a exponenciais esticadas em várias áreas, como mercado financeiro e física do estado sólido [52,53]. No entanto, a relação entre as duas análises não será feita durante a Dissertação, apenas utilizada como motivação para a análise a ser realizada.

Em algumas séries, não é tão simples detectar um único expoente de escala (dimensão fractal) [54, 55]. Isso pode ocorrer devido à diferença entre as partes das séries. Podemos interpretar a multifractalidade como uma escala de tons de cinza de dimensões fractais, conforme mencionado por Zamir [56]. Assim, multifractalidade é uma característica de sistemas que são descritos por múltiplos expoentes de escala. Em geral, a intensidade da multifractalidade depende de alguns parâmetros do sistema como mostram estudos de diferentes sistemas físicos, como em Física da Matéria Condensada, onde a largura do espectro de singularidade  $e$ , conseqüentemente, o caráter multifractal das flutuações da condutância em nanoestruturas, pode variar com a energia do sistema [57], ou com a temperatura [58]. Em um contexto diferente, em matéria ativa, especificamente na dinâmica de grupos de peixes conhecidos como *Zebrafish* interagentes apresentam flutuações na polarização associada ao movimentos dos mesmos, e tais flutuações apresentam comportamento multifractal mais forte (mais fraco) quando a densidade de peixes diminui (aumenta) [59]. Em geral, podemos dizer que a multifractalidade associada às flutuações de um parâmetro físico dependem de fatores externos que têm influência sobre o sistema em estudo, como também indicam os resultados deste trabalho.

O **MF-DFA** teve seu desenvolvimento inicial com base no **DFA**, no qual o **MF-DFA** se diferencia na utilização de múltiplos expoentes de escala (momentos) ao invés do único utilizado pelo **DFA**, sua primeira aplicação foi na organização do DNA [60], onde uma série temporal foi produzida a partir dos nucleotídeos, denominada de DNA Walk [61]. Foi demonstrado que as flutuações da série dependem da escala de acordo com uma lei de potência; isto será melhor compreendido após a apresentação do **MF-DFA** na Seção 3.4. Isso culminou na publicação [62], na qual é apresentado o método e suas implicações. Embora tenha vindo de uma motivação biológica, podemos encontrar trabalhos utilizando o método em diversas áreas, como mercado financeiro [63], medicina [64], ecologia [65], previsão do tempo [66], entre outros; podemos salientar também a utilização da multifractalidade como um indicador ecológico, como mostra [67, 68], assim como a utilização do mesmo como meio de estatística espacial como mostra [69] e outros estudos nos quais mesmo não utilizando o método multifractal se propõe ao estudo da auto-similaridade na distribuição de espécies [70].

O [MF-DFA](#) não é o primeiro método de análise multifractal para séries temporais. Antes dele, temos outros métodos, como o Wavelet Transform Modulus Maxima ([WTMM](#)) [71], por exemplo. Este método trabalha utilizando ondaletas nos quais detecta os pontos de maior magnitude, porém o mesmo acabou mostrando-se, de certa maneira, de difícil implementação e de lenta execução para longas séries temporais. O [MF-DFA](#), por sua vez, mostrou-se o mais adequado para a abordagem proposta. Neste trabalho, foi criado um script desenvolvido em Python para a análise das séries temporais.

# 3 Modelo Computacional

Esse capítulo propõe-se a explicar de maneira detalhada o modelo computacional na qual essa dissertação se baseia. Foi construído um modelo no qual é estabelecido uma relação de competição entre as espécies.

## 3.1 Ecossistema

### 3.1.1 A Rede

Definimos o local do ecossistema sendo uma rede quadrada de lado  $L$  e tamanho  $N$  onde  $N = L \times L$ , com condição de contorno periódica (Figura 11). Nesse caso a periodicidade se faz necessária para manter a continuidade de interações do ecossistema.

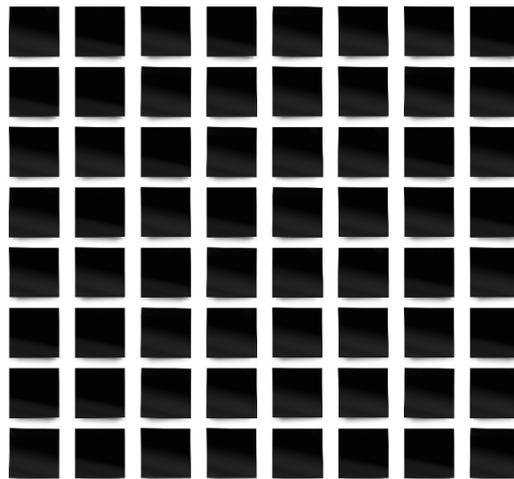


Figura 11 – Representação de uma rede com  $N = 8 \times 8$  sítios.

### 3.1.2 Sítio e vizinhos

O ambiente é definido como o espaço geográfico onde um ou mais indivíduos de uma espécie residem. Dentro desse contexto, é possível descrever o ambiente como cada sítio da rede, que pode estar ocupado ou desocupado, representando a presença ou ausência de um único indivíduo.

Assim como em ecossistemas reais, é incontestável que um único indivíduo não seja o único presente em toda a extensão da rede. Por conseguinte, é de suma importância caracterizar os indivíduos que se encontram nas proximidades de um sítio específico. Para tanto, empregaremos a vizinhança de von Neumann com raio 1, na qual os indivíduos contíguos são designados como vizinhos, como exemplifica a Figura 12.



Figura 12 – Representação dos vizinhos.

Como utilizamos condições de contorno periódicas, se faz necessário criar condições especiais para os sítios localizados nas bordas da rede, como exemplificado na Figura 13.

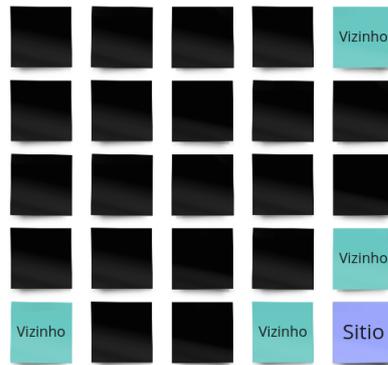


Figura 13 – Representação da condição de contorno para os vizinhos.

### 3.1.3 Distribuição de recursos

Conforme mencionado anteriormente, a dinâmica do sistema é fundamentada em uma relação ecológica de competição, na qual o recurso desempenha um papel de extrema importância nessa interação entre os indivíduos. Tendo isso em consideração, a forma que os recursos são distribuídos na rede é um ponto fundamental da dinâmica. Nesse sentido, para ser possível contemplar a heterogeneidade dos recursos empregamos o método Movimento Browniano Fracionário (**MBF**). Ao contrário do movimento browniano clássico, **MBF** estabelece ligações entre os incrementos, como descrito em [72].

No **MBF**, os incrementos têm distribuição normal com média zero e variância dada por:

$$\text{var}(Y(x_2) - Y(x_1)) \propto |x_2 - x_1|^{2H}. \quad (3.1)$$

O expoente de Hurst,  $H$ , pode assumir valores no intervalo  $0 < H < 1$ , sendo subdivididos em três intervalos que ditam o comportamento dos incrementos.

- $H < 0.5$  - Anti-Correlacionado (relevos se tornam mais rugosos quando  $H \rightarrow 0$ )
- $H = 0.5$  - Descorrelacionado
- $H > 0.5$  - Correlacionado (relevos se tornam mais suaves quando  $H \rightarrow 1$ )

A figura abaixo mostra uma representação das distribuições de um recurso para uma rede de tamanho  $L = 512$ :

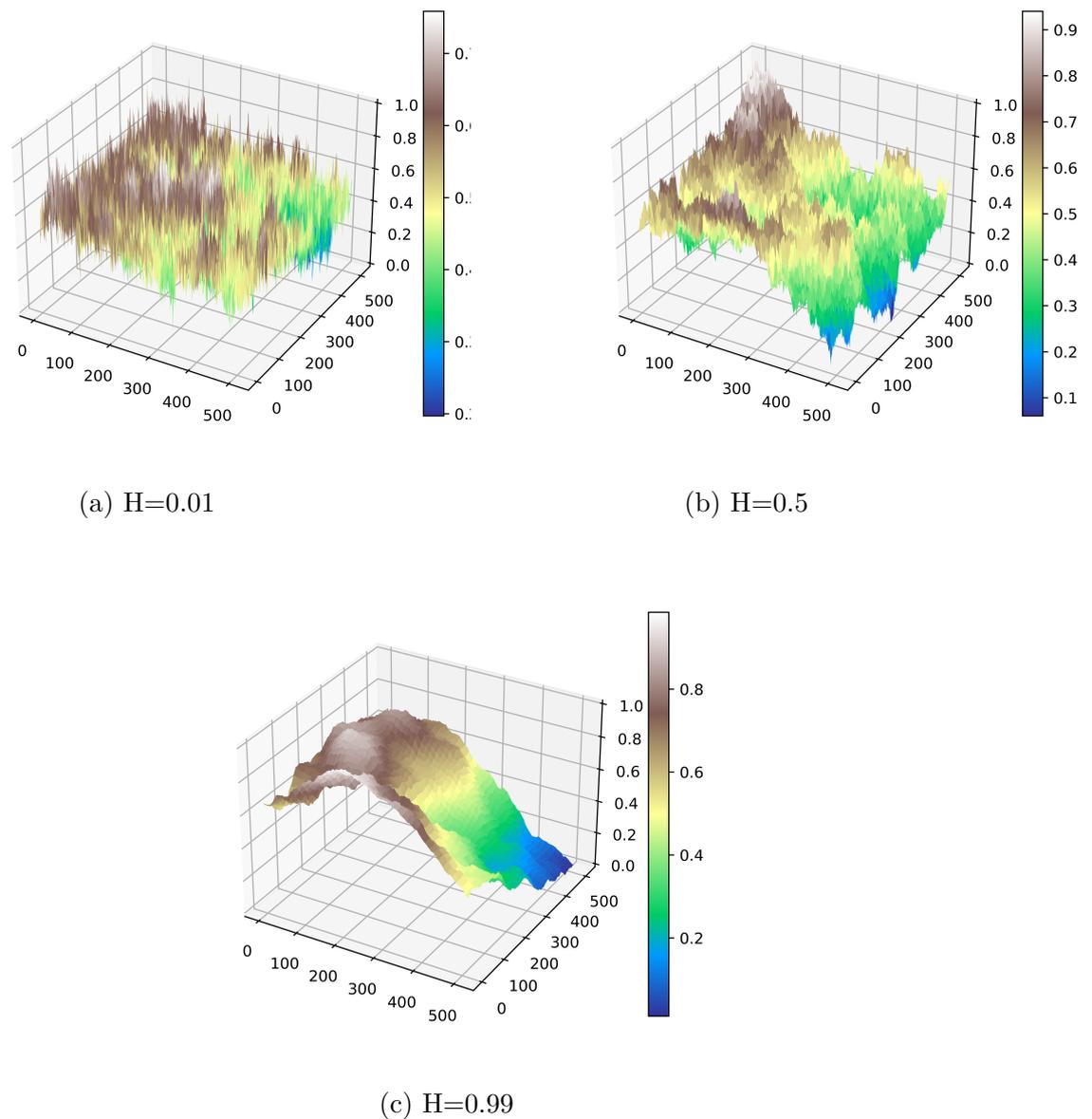


Figura 14 – Representação da distribuição dos recursos para uma rede de  $L = 512$  com expoente de Hurst indicado nas legendas de cada gráfico.

A quantidade de recursos em cada sítio, em princípio, pode ser muito grande. No entanto, para fins de estudo, podemos delimitar a mesma para uma quantidade fixa,

denotando o recurso como  $R_{l,j}$ , onde  $j$  corresponde ao sítio no qual aquele recurso está presente e  $l$  é a posição daquele recurso entre os  $n$  recursos presentes no sítio.

## 3.2 Indivíduo

Iniciamos a nossa dinâmica preenchendo a rede completamente com indivíduos da mesma espécie.

### 3.2.1 Morte

Nesse trabalho optamos pela maneira mais simples de tratar a morte de um indivíduo da rede, logo todos indivíduos tem uma probabilidade de morte fixa em  $m=1\%$ .

### 3.2.2 Reprodução

A reprodução faz parte da vida de todo ser vivo, seja ela assexuada ou sexuada. Em nosso modelo computacional utilizamos a reprodução assexuada. O modo matemático para essa reprodução é por meio da Equação de Monod (2.5), onde assumimos que  $\mu_{\max} = 1$ . Desta maneira, se a quantidade de recurso no sítio for normalizada também para 1, o que obtemos é uma Função Probabilidade de Reprodução (FPR) que denotaremos por:

$$f = \frac{R}{R + K}. \quad (3.2)$$

No entanto, como mencionado acima, em nosso sistema podemos ter inúmeros recursos em um determinado sítio da rede e, como consequência, o surgimento de várias FPR como mostrado abaixo :

$$f_{i,j} = \frac{R_{l,j}}{R_{l,j} + K_{l,i}}, \quad (3.3)$$

onde os índices denotam:

- $i$  = Espécie;
- $j$  = Sítio;
- $l$  = Recurso.

Ao adicionar novas FPR surge um problema de qual FPR escolher como a principal. Estatisticamente seria possível escolher métodos como a média, mediana ou a moda para solucionar esse problema, no entanto temos essa resposta de maneira biológica utilizando a Lei de Liebig's. Assim a FPR escolhida assume a forma final:

$$f_{i,j} = \min \left( \frac{R_{1,j}}{R_{1,j} + K_{1,i}}, \frac{R_{2,j}}{R_{2,j} + K_{2,i}}, \dots, \frac{R_{n,j}}{R_{n,j} + K_{n,i}} \right). \quad (3.4)$$

### 3.2.3 Mutação

Como já fora discutido anteriormente, em nosso sistema caracterizamos a mutação como sendo uma mudança nas constantes de meia saturação de uma determinada espécie. No entanto há de se esperar que as mutações sejam graduais <sup>1</sup>. Logo modelamos a mutação no sistema por uma gaussiana de variância  $\sigma^2$  e média  $\mu$ . Descrevemos os passos seguidos durante o processo de mutação abaixo:

- É sorteada uma das **KMS** da espécie genitora;
- É estabelecida uma gaussiana com variância  $\sigma^2$  pré estabelecida e média  $\mu$  igual ao valor da **KMS** sorteada;
- É gerada uma nova **KMS** a partir da distribuição gaussiana mencionada no item anterior;
- É feita a substituição da **KMS** da espécie original pela nova **KMS**, gerando assim a nova espécie.

Apresentamos a esquematização desse processo na Figura 15.

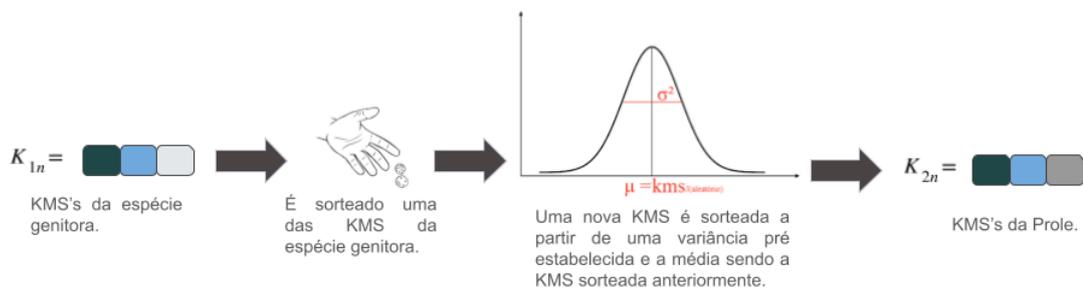


Figura 15 – Representação do processo de mutação.

No entanto, nesse tipo de mutação surge um problema. Se em um suposto ramo específico as mutações levassem sempre a valores menores de  $K_{l,i}$ , após um número razoável de gerações a **FPR** da espécie tenderia a 1 em qualquer sítio da rede, como mostra a Figura 16, onde foi simulado um caso especial com a condição que as mutações levassem sempre a valores menores de  $K_{i,j}$ , um caso no qual as mutações ocorrem sem um **TO** (caso geral) e outro caso no qual aplicamos um trade-off.

<sup>1</sup> Assim como um lobo-ocidental não veio a se tornar um husky siberiano de uma geração para outra.

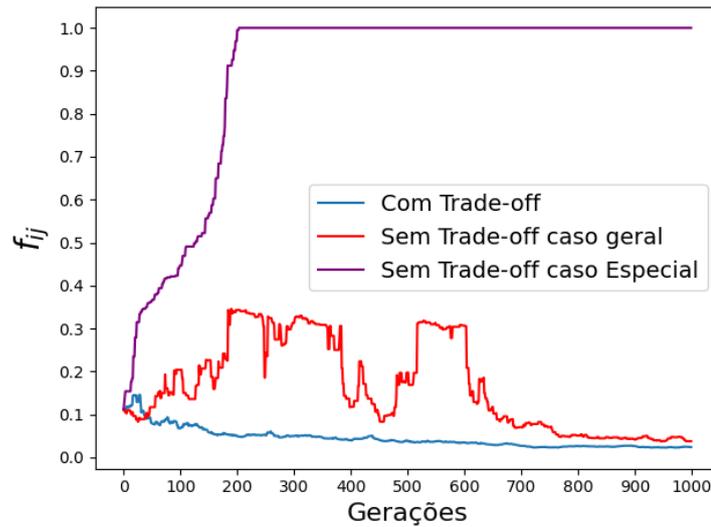


Figura 16 – Simulação computacional da função de reprodução. Foram simulados três casos: o primeiro denominado de caso geral foi simulado sem o **TO** como esquematizado na Figura 15; no segundo simulamos o caso especial em que é gerada uma espécie generalista; e o terceiro caso em que foi aplicado um **TO**.

Para contornar esse problema utilizaremos um **TO** durante o processo de mutação com uma condição:

$$\sum_{l=1}^n K_{l,i} = \lambda. \quad (3.5)$$

Logo os novos passos da mutação serão :

- É sorteada uma das **KMS** da espécie genitora;
- É estabelecida uma gaussiana com variância  $\sigma^2$  pré estabelecida e média  $\mu$  igual ao valor da **KMS** sorteada;
- É gerada uma nova **KMS** a partir da distribuição gaussiana mencionada no item anterior;
- É feita a substituição da **KMS** da espécie original pela nova **KMS**, gerando assim um novo conjunto de **KMS**;
- As **KMS** da espécie são normalizadas para atender o critério da Eq. 3.5, dando origem assim a uma nova espécie.

Assim o processo de mutação se torna como mostrado na Figura 17.

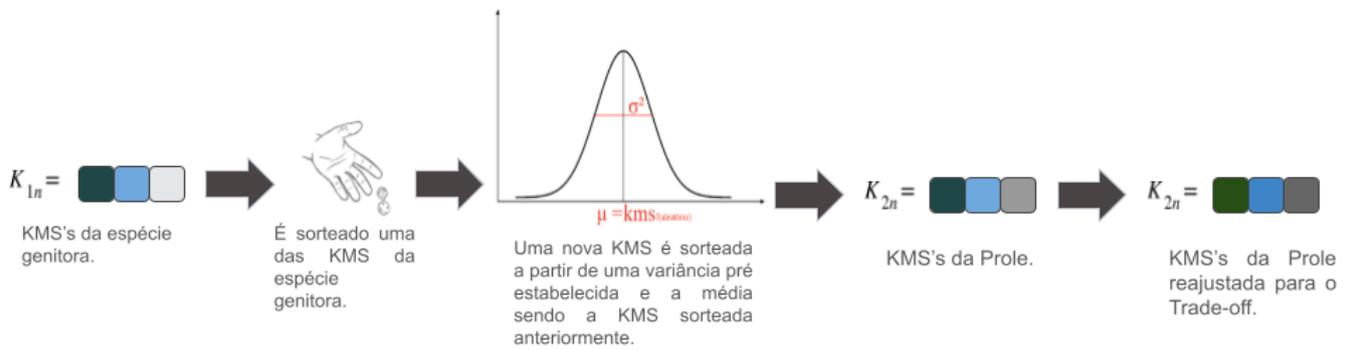


Figura 17 – Representação do processo de mutação após a implementação do TO.

### 3.3 Dinâmica

#### 3.3.1 Parâmetros do sistema

Assim como mostrado anteriormente, temos alguns parâmetros do nosso modelo como a variância  $\sigma^2$  e média  $\mu$  da distribuição gaussiana associada ao processo de mutação e a taxa de morte. Outro parâmetro que ainda não foi mencionado é a taxa de mutação, representada por  $\nu$ , que se mantém constante para todos os indivíduos da rede.

Em nosso sistema contamos um passo de tempo quando o número de interações sorteadas é igual ao número de sítios da rede. Assim, estatisticamente, é muito provável que todos os sítios da rede sejam visitados durante a dinâmica do sistema. Abaixo apresentamos os parâmetros utilizados.

- Taxa de morte:  $m = 10^{-2}$ ;
- Taxa de mutação:  $\nu = 10^{-\omega}$  Sendo ( $\omega \in \mathbb{R}_+$ );
- Variância da gaussiana:  $\sigma^2 = 10^{-2}$ ;
- Expoente de Hurst:  $0 < H < 1$ ;
- Tempo:  $t$

#### 3.3.2 Programa computacional

A dinâmica está representada na Figura 18 de forma a ficar mais claro para o leitor.

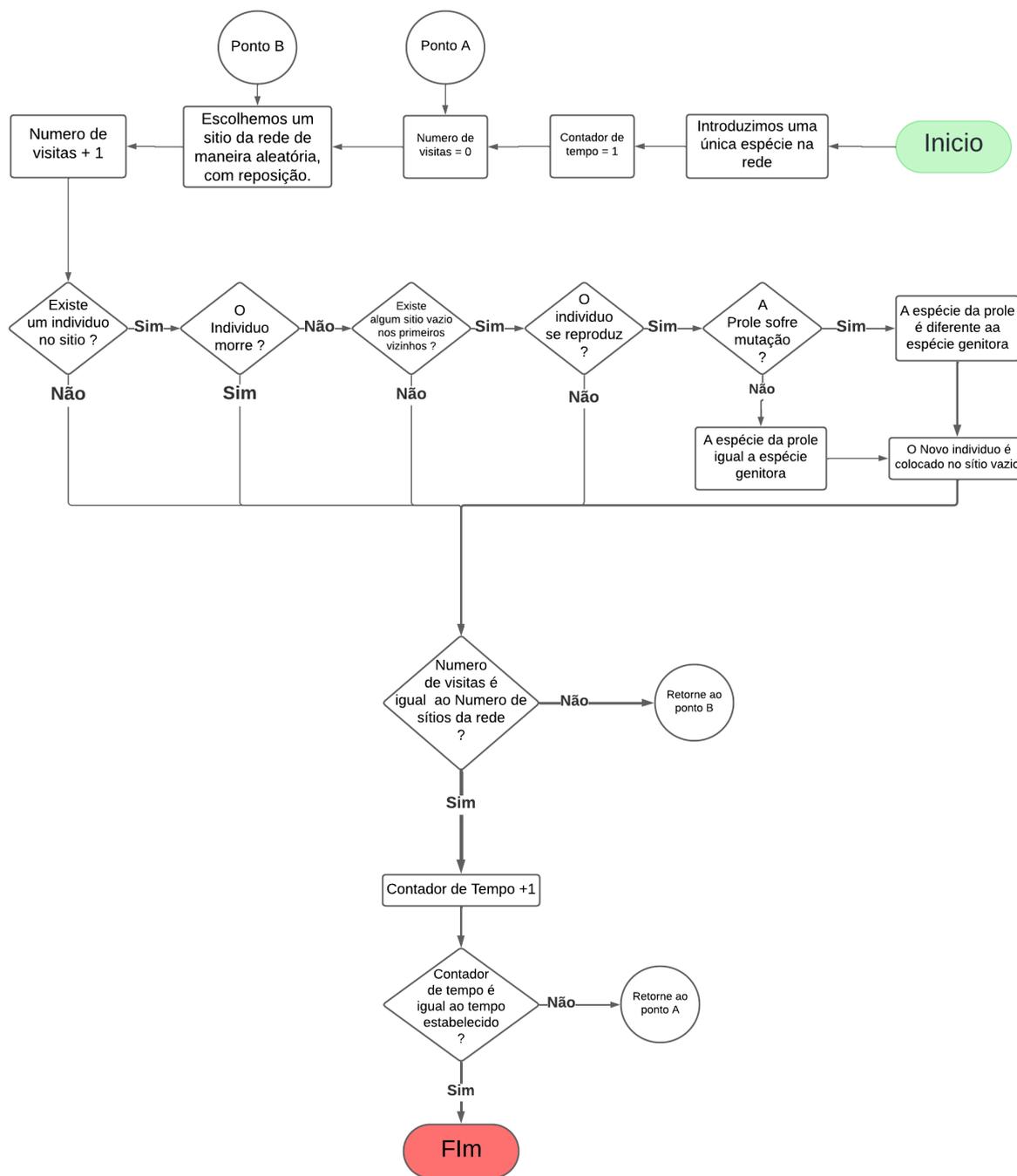


Figura 18 – Fluxograma do Programa computacional.

### 3.4 MF-DFA

Alguns aspectos da multifractalidade e do método já foram abordados anteriormente na Seção 2.5. Esta seção será dedicada a um tutorial sobre a aplicação do método.

Para empregar o método, é necessário inicialmente distinguir o tipo de série que será analisada, conforme explicado por [62]. O MF-DFA deve ser realizado sobre uma série temporal do tipo integrada e não sob uma série temporal ruidosa. Podemos entender a diferença entre esses tipos de série ao considerarmos a cotação de ações: se obtivermos a variação diária de uma determinada ação, teremos uma série ruidosa, enquanto que obter o valor de fechamento da ação resultará em uma série integrada, como mostra a Figura 19.

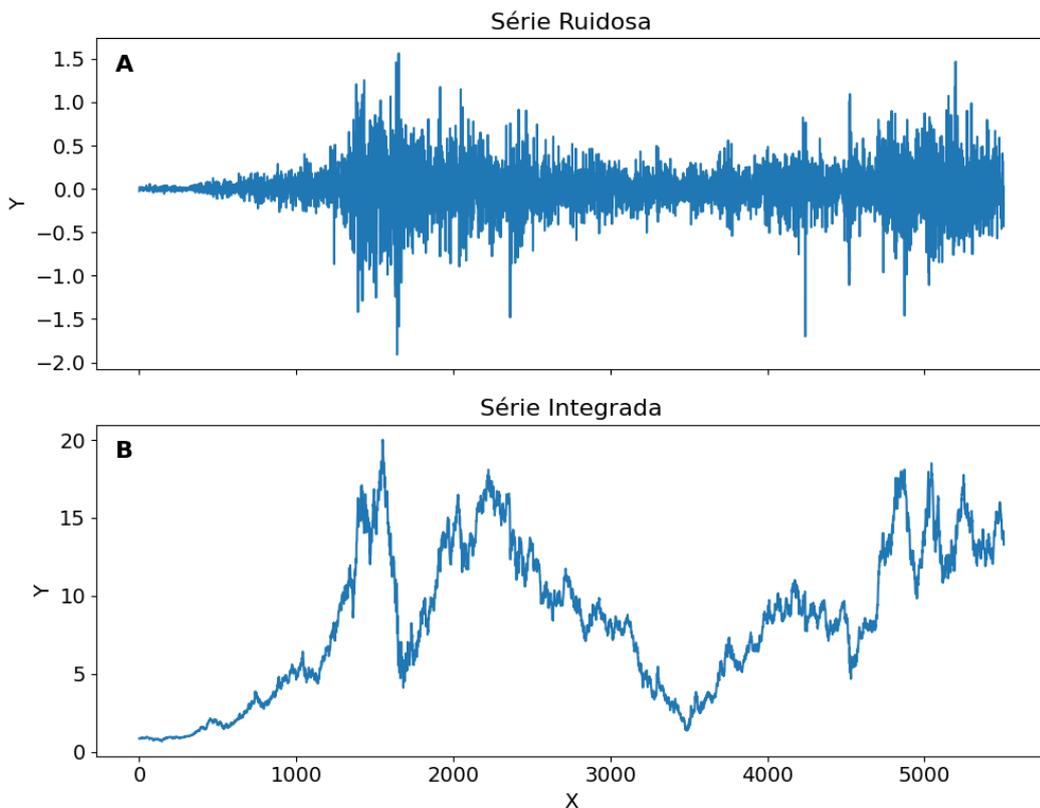


Figura 19 – Variação diária das ações da Vale do Rio Doce (A) representando uma série ruidosa e valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce (B), representando uma série integrada, obtidas via biblioteca `yfinance` da linguagem de programação python.

Após a obtenção da série temporal integrada, de tamanho  $N$ , é necessário dividir esta em caixas de mesmo tamanho  $s$ , totalizando um número  $N_s = \text{int}(N/s)$  de caixas. Note que, dependendo dos tamanhos das caixas, haverá caixas não preenchidas totalmente ao final da série temporal; essa caixa deverá ser descartada, conforme mostrado nas Figuras 20 e 21.

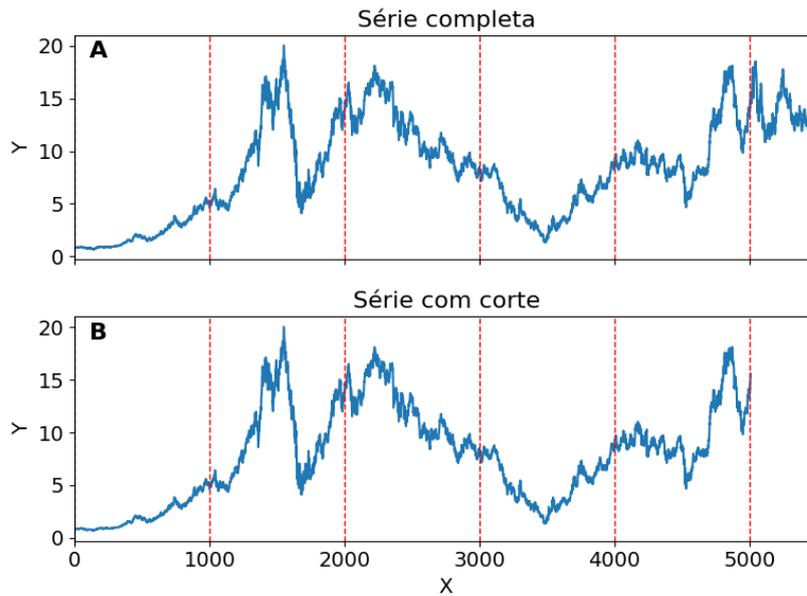


Figura 20 – Série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce, dividida em caixas com descarte de pontos no final da série.

Em seguida, consideramos a mesma série temporal, desta vez fazendo a contagem das caixas “de trás para frente”, descartando os pontos que sobram no início da série, como mostra a Figura 21, percorrendo a série duas vezes, com  $N_2$ s caixas nas duas varreduras.

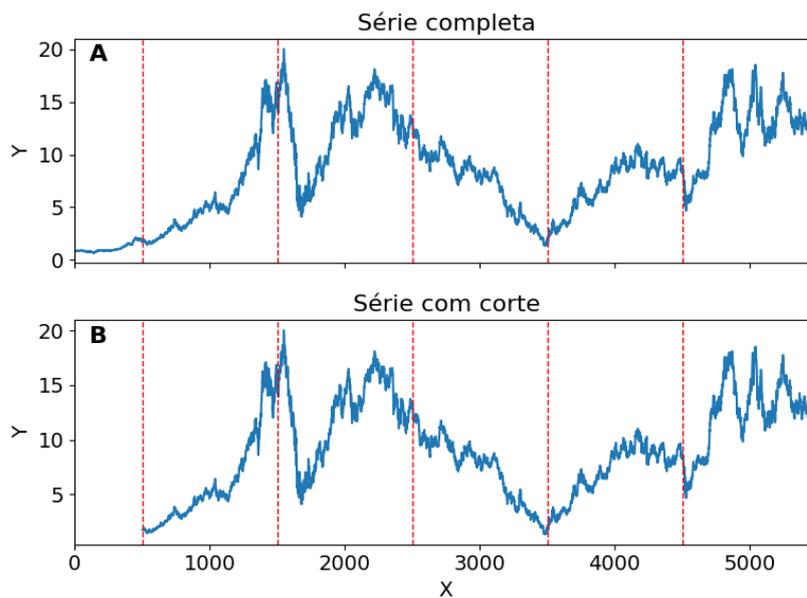


Figura 21 – Série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce, dividida em caixas com descarte de pontos no início da série.

Com a divisão em caixas feita em ambas as séries, é necessário realizar um ajuste polinomial em cada caixa, onde  $Y_x$  simbolizará os pontos pertencentes à série temporal e  $y_x$  os pontos do ajuste polinomial. O grau do polinômio ( $m$ ) determinará o grau do

MF-DFA, como mostra a Figura 22, que mostra os mil primeiros pontos da série que representa uma caixa.

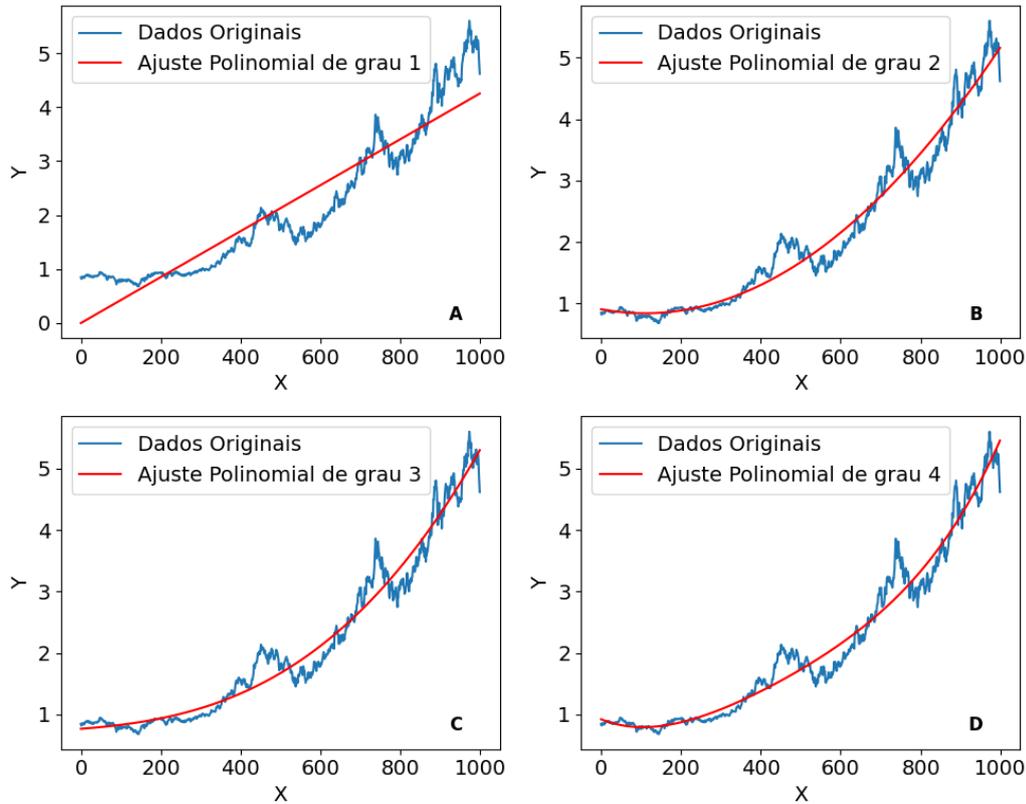


Figura 22 – Mil pontos iniciais da série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce, representando uma caixa, na qual é mostrado os ajustes polinomiais e o seu respectivo grau.

Então, feitos os passos anteriores, podemos iniciar a parte algébrica do método, a qual consiste em calcular a variância em relação ao ajuste, como mostra as Equações 3.6 e 3.7, na  $v$ -ésima caixa.

A Equação 3.6 representa o corte no final da série no qual são descartados os pontos restantes no final da mesma.

$$F_{(v,s)} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (Y_{(v-1)s+i} - y_{(v-1)s+i})^2, \quad v = 1, \dots, N_s. \quad (3.6)$$

A Equação 3.7 representa o corte no início da série o qual são descartados os pontos restantes no início da mesma. Essa última equação pode ser implementada de algumas maneiras. Uma delas é na qual as caixas realmente comecem a ser contadas do final para o início da série. A outra maneira, mais simples, é começar a contabilizar as caixas no sentido início fim, no entanto, iniciando a contagem números de pontos que sobraram no final da série mais um ponto.

$$F_{(v,s)} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s (Y_{N-N_s s+(v-N_s-1)s+i} - y_{N-N_s s+(v-N_s-1)s+i})^2, \quad v = N_s + 1, \dots, 2N_s. \quad (3.7)$$

Com as variâncias obtidas em todas as caixas, utilizaremos a Equação 3.8 para obter as funções de flutuação  $F_q(s)$  de ordem  $q$  do MF-DFA.

$$F_q(s) = \left[ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^s [F(v, s)]^{\frac{q}{2}} \right]^{\frac{1}{q}}. \quad (3.8)$$

Esses procedimentos devem ser feitos várias vezes com diferentes tamanhos de caixas  $s$ , sendo possível a visualização de que a relação  $F_q(s)$  e  $s$  seguem uma lei de potência:

$$F_q(s) \propto s^{h(q)}. \quad (3.9)$$

Para a obtenção de  $h(q)$  é necessário o ajuste linear de  $F_q(s)$  x  $s$  em uma escala log-log, onde a inclinação do ajuste é o  $h(q)$ , o chamado expoente de Hurst generalizado, como mostra a Figura 23:

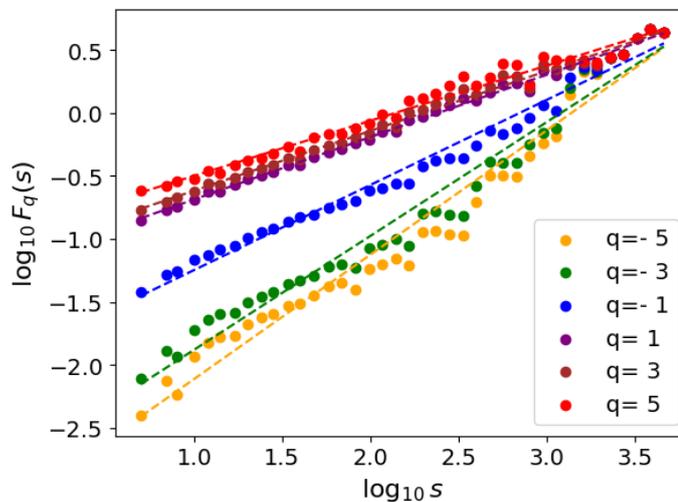


Figura 23 – Gráfico representante da Eq 3.9, numa escala log-log com alguns valores de  $q$  selecionados como mostra o gráfico.

Na Eq. 3.8, ao variar  $q$ , podemos obter a relação  $h(q) \times q$ , como mostra a Figura 24. O mesmo pode ditar a multifractalidade e os graus de correlação do sistema. No entanto, devemos ter cuidado ao fazer uma relação de multifractalidade e correlação pois, como mostra [62], para ter certeza de que a multifractalidade é devida às correlações do sistema e não a um resultado puramente matemático, deve ser feito um teste que consiste no embaralhamento da série ruidosa, integração dessa série e realização do MF-DFA.

Assim, a série perderá sua multifractalidade e terá  $h(q) \simeq 0.5$ , mostrando que o resultado anterior não é puramente matemático. Vale ressaltar que o **MF-DFA** é uma generalização do **DFA**, logo se utilizarmos o **MF-DFA** podemos selecionar apenas o resultado de  $q = 2$  para assim obter o **DFA** e o grau de correlação do sistema. Uma vez obtido o resultado e o grau de correlação do sistema o mesmo segue as mesmas escalas de correlação apresentadas na Subseção 3.1.3, pois  $h(q) = h(2) = H$ , como mostra [62].

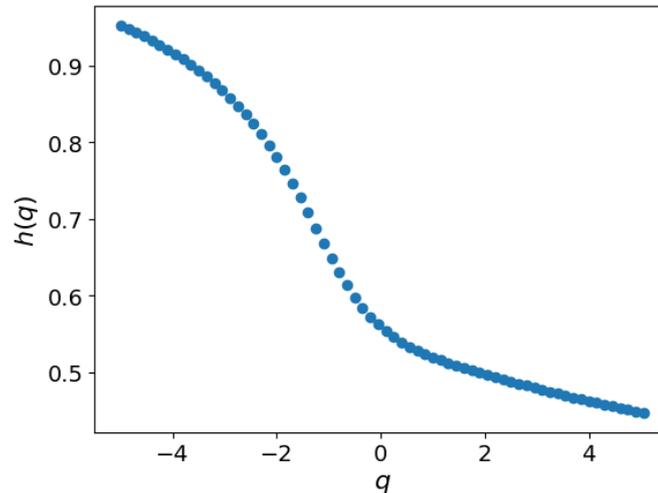


Figura 24 – Gráfico do expoente de Hurst generalizado em função dos momentos,  $h(q) \times q$ , para a série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce.

Definimos uma série como monofractal quando  $h$  não varia com  $q$ ; por outro lado, ela é dita multifractal quando  $h$  tem uma dependência de  $q$ . No entanto, essa multifractalidade pode ter diferentes intensidades. Temos algumas formas de aferir o quão forte a mesma é. Uma forma é por meio do expoente de escala multifractal  $\tau(q)$ , definido por:

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (3.10)$$

Podemos, assim, obter o gráfico de  $\tau(q) \times q$ , como mostra a Figura 25.

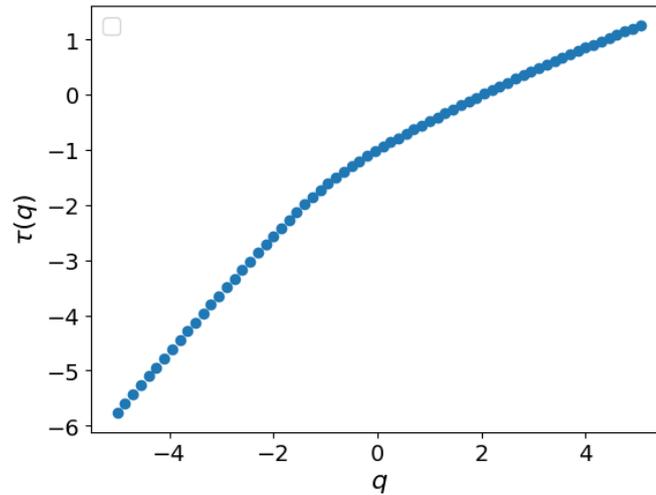


Figura 25 – Gráfico do expoente de escala multifractal em função dos momentos,  $\tau(q) \times q$ , para a série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce.

No entanto, se  $\tau(q)$  for suficientemente suave, podemos obter um medidor de força de singularidade  $\alpha$  sendo definido por:

$$\tau'(q) = \alpha. \quad (3.11)$$

Assim, obtendo uma função para a quantificação da multifractalidade, o espectro de singularidade  $D(\alpha)$ , que pode ser dado pela Eq. 3.12 ou pela sua representação gráfica, como mostra a Figura 26:

$$D(\alpha) = q\alpha - \tau(q). \quad (3.12)$$

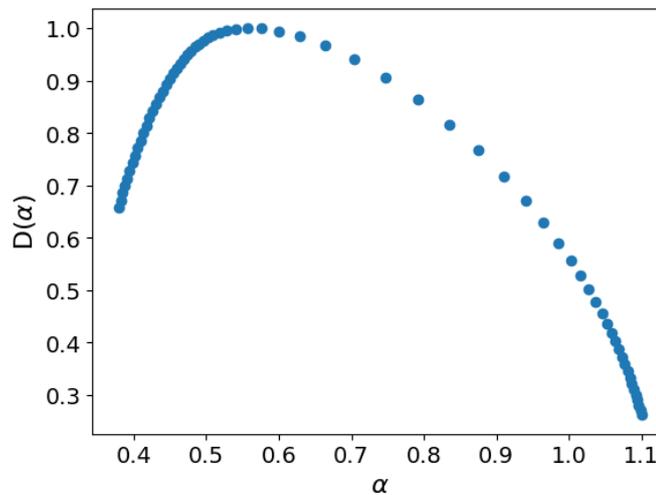


Figura 26 – Gráfico do espectro de singularidade em função do fator de intensidade de singularidade,  $D(\alpha)$  em relação a  $\alpha$ , para a série do valor de fechamento das ações da Vale do Rio Doce.

Muitas vezes, o  $D(\alpha)$  não é suficientemente claro visualmente devido à falta de centralização das funções ou outros fatores. Nesses casos, utilizamos como recurso de comparação a variação  $\Delta\alpha$ :

$$\Delta\alpha = \max(\alpha) - \min(\alpha). \quad (3.13)$$

O  $\Delta\alpha$  mede o quão aberta está o  $D(\alpha)$ , dessa forma podemos ter uma visão mais clara de quão forte é a multifractalidade.

## 4 Resultados

Neste capítulo mostraremos os resultados obtidos através das dinâmicas e análises propostas. Também apresentaremos uma breve discussão desses resultados.

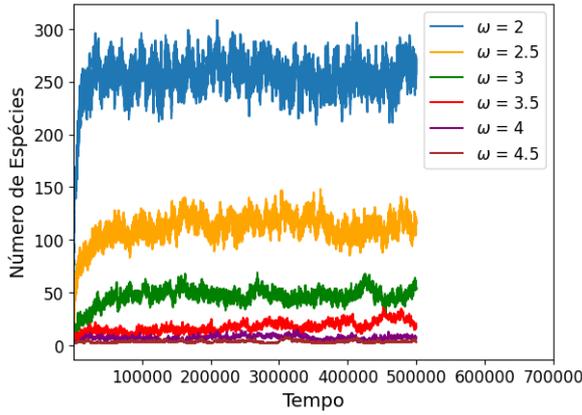
### 4.1 Série temporal

Para a obtenção dos resultados que mostraremos a seguir, utilizamos os conjuntos de parâmetros apresentados na Tabela 1.

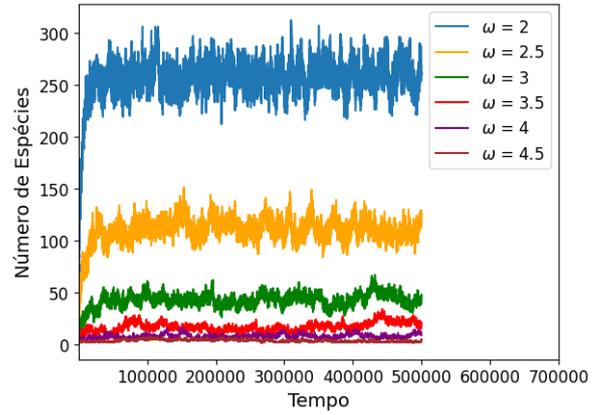
|          |               |               |               |               |               |               |               |               |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $L$      | 64 128        | 64 128        | 64 128 256    | 64 128 256    | 64 128 256    | 64 128 256    | 256           | 256           |
| $H$      | 0.01 0.5 0.99 | 0.01 0.5 0.99 | 0.01 0.5 0.99 | 0.01 0.5 0.99 | 0.01 0.5 0.99 | 0.01 0.5 0.99 | 0.01 0.5 0.99 | 0.01 0.5 0.99 |
| $\omega$ | 2             | 2.5           | 3             | 3.5           | 4             | 4.5           | 5             | 5.5           |

Tabela 1 – Parâmetros das séries temporais.

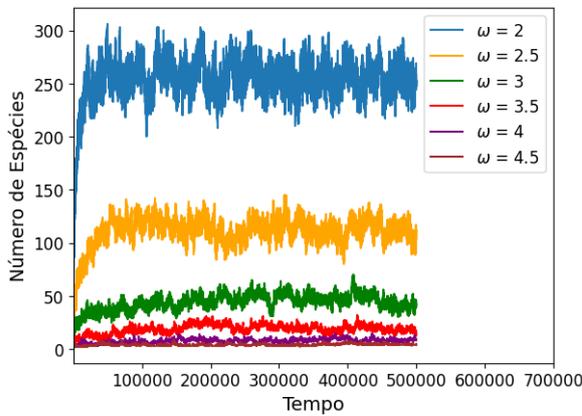
As séries temporais apresentadas nas Figuras 27 e 28 foram obtidas a partir da dinâmica mostrada na Subseção 3.3.2. As mesmas mostram o número médio de espécies ao longo do tempo, sendo obtidas verificando o número de espécies existentes na rede ao final de cada passo de tempo.



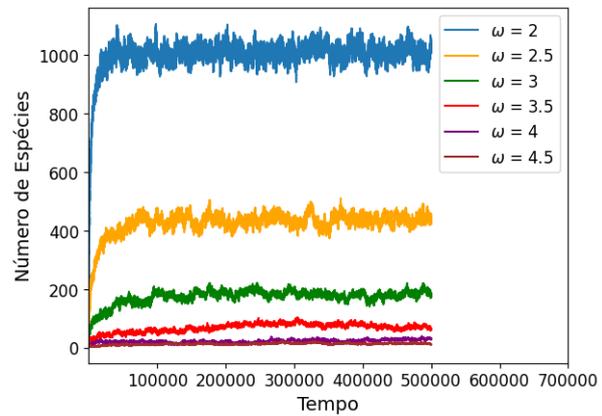
(a)  $L = 64, H = 0.01$



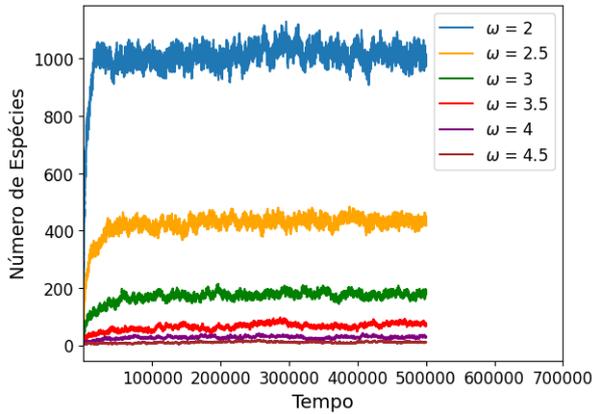
(b)  $L = 64, H = 0.5$



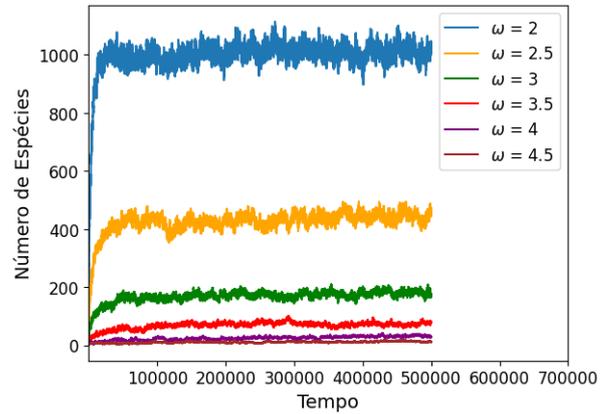
(c)  $L = 64, H = 0.99$



(d)  $L = 128, H = 0.01$



(e)  $L = 128, H = 0.5$



(f)  $L = 128, H = 0.99$

Figura 27 – Séries temporais da média do número de espécies obtidas através da dinâmica contabilizando o número de espécies presentes na rede a cada passo de tempo. Em cada Figura variamos a taxa de mutação  $\nu = 10^{-\omega}$ . Os parâmetros  $H$  e  $L$  são especificados nas legendas.

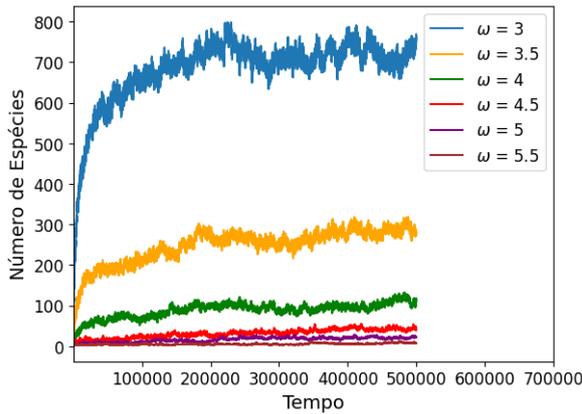
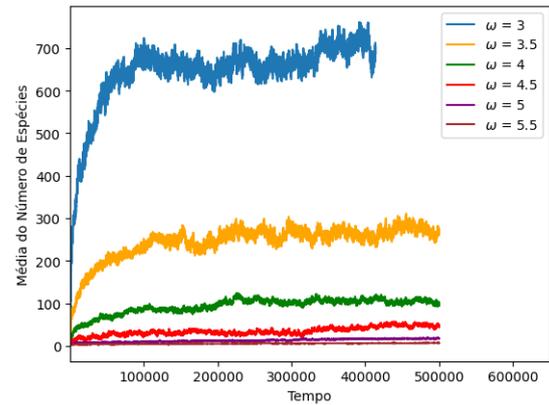
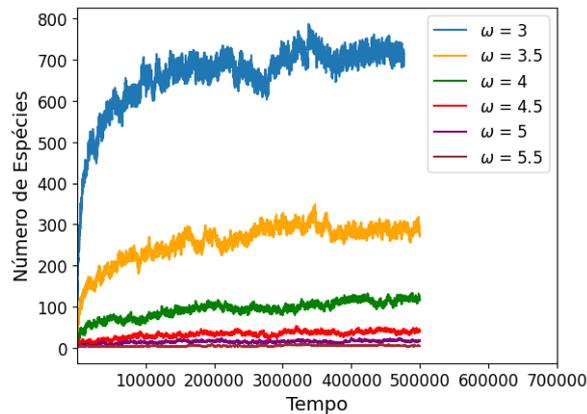
(a)  $L = 64, H = 0.99$ (b)  $L = 128, H = 0.99$ (c)  $L = 256, H = 0.99$ 

Figura 28 – Séries temporais do número obtidas através da dinâmica contabilizando o número de espécies presentes na rede a cada passo de tempo. Em cada figura variamos a taxa de mutação  $\nu$ . Os parâmetros  $H$  e  $L$  são especificados nas legendas.

Como podemos notar nas séries temporais mostradas nas Figuras 27 e 28, os parâmetros que modificam de maneira significativa o comportamento das séries temporais são o tamanho da rede e a probabilidade de mutação  $\nu$ . Podemos também observar que mesmo continuando a ter variações, as mesmas entram num estado estacionário ocorrendo pequenas variações em torno de um valor médio. Nota-se que o grau de correlação do relevo fractal, indicado pelo parâmetro  $H$ , não mostra-se tão influente nas séries temporais e, como mostrado pelos resultados obtidos, tão pouco na análise multifractal. Logo, nos resultados que serão apresentados, a análise foi feita variando o tamanho da rede e o expoente  $\nu$ , e os resultados para os diferentes valores de  $H$  serão disponibilizados no apêndice A.

## 4.2 Parâmetros do MF-DFA

Na literatura podemos verificar que o parâmetro  $q$  não tem uma amplitude determinada, assim podendo variar de -5 a 5 e -40 a 40 dependendo do problema ao qual é aplicado. A escolha dos tamanhos de caixas, por outro lado, é um problema, pois diferentes sistemas geralmente não possuem os mesmos comprimentos característicos.

O primeiro parâmetro a ser discutido é o tamanho mínimo de caixa  $s$  (ver Equação 3.8). Como podemos observar na Equação 3.7, o MF-DFA é feito com base numa variância em relação a um ajuste polinomial. Existem séries temporais que apresentam períodos de estagnação, o que nos leva a um problema matemático, quando  $q$  assume valores negativos e a Equação 3.8 se torna uma divisão por zero. Assim a própria série temporal requer um tamanho mínimo de caixa para que não caiamos nesse erro matemático. Em nosso caso, isso pode ocorrer de duas maneiras. O primeiro caso dá-se quando não temos criação e extinção de nenhuma espécie, e o segundo caso, podemos denominar de uma soma de zeros na qual o número de espécies criadas é o mesmo de espécies extintas, logo teremos uma estagnação na série temporal da diversidade.

Podemos mostrar estagnação utilizando um exemplo aplicado à economia como a taxa Selic<sup>1</sup>, como mostra a Figura 29. Caso seja feito um corte na série temporal, veremos a Figura 30, que mostra os dados da Selic no período de 22/03/2018 a 20/07/2019 e que demonstra a não variação dos dados nesse período.

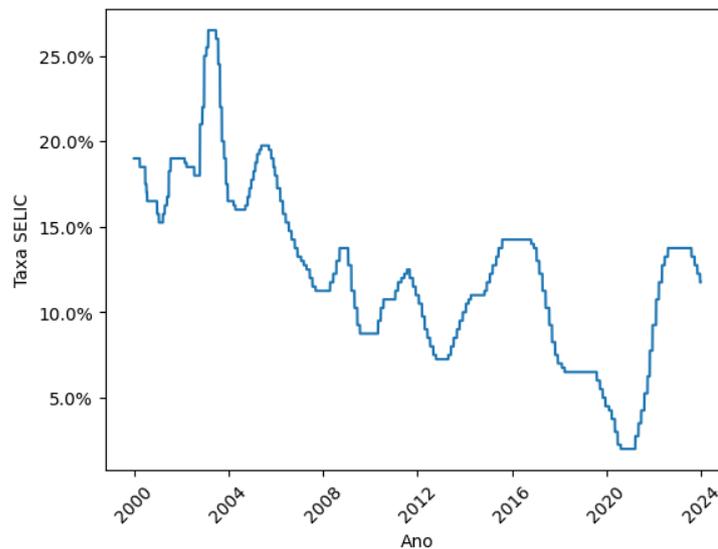


Figura 29 – Série temporal da taxa selic, obtidas via biblioteca bcb da linguagem de programação python, por meio de uma API que coleta dados públicos disponibilizados pelo banco central.

<sup>1</sup> A taxa Selic é a taxa básica de juros da economia, que influencia outras taxas de juros do país, como taxas de empréstimos, financiamentos e aplicações financeiras. A definição da taxa Selic é o principal instrumento de política monetária utilizado pelo Banco Central (BC) para controlar a inflação.

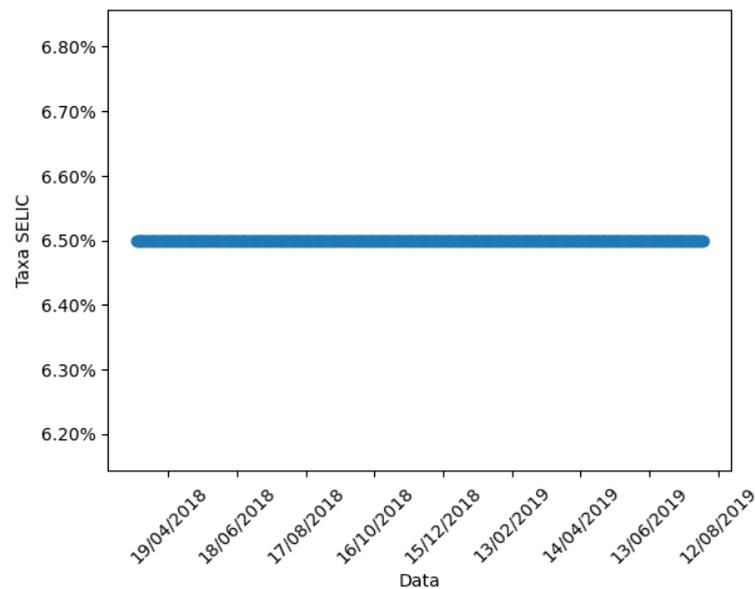


Figura 30 – Dados selecionados no período de 22/03/2018 a 20/07/2019 da série temporal da taxa selic, obtidas via biblioteca `bcbr` da linguagem de programação `python`, por meio de uma API que coleta dados públicos disponibilizados pelo banco central.

Outro problema que temos é com o tamanho máximo de caixa, que ocorre devido ao ajuste realizado na Equação 3.9. Como podemos perceber na Figura 23 para o valor de  $q = -5$ , os pontos mais próximos a  $\text{Log}_{10}(s) = 3.5$  se desviam da tendência da reta, fazendo assim o mal ajuste. Sendo assim, nosso sistema se limita a um valor de caixa máxima e caixa mínima, e todos os nossos resultados serão obtidos respeitando essa regra justificando a não utilização dos mesmos parâmetros em todas as séries temporais. Todos os tamanhos de caixa para cada série temporal serão exibidos nas Tabelas 2, 3 e 4.

## 4.2.1 Tabelas de parâmetros

| $\omega$ | 2  | 2.5 | 3   | 3.5 | 4    | 4.5  |
|----------|----|-----|-----|-----|------|------|
| H=0.01   | 50 | 50  | 350 | 550 | 1000 | 5000 |
| H=0.5    | 50 | 50  | 350 | 550 | 1000 | 5000 |
| H=99     | 50 | 50  | 350 | 550 | 1000 | 5000 |

(a) Mínimo

| $\omega$ | 2          | 2.5    | 3      | 3.5    | 4      | 4.5    |
|----------|------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| H=0.01   | $10^{4,3}$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ |
| H=0.5    | $10^{4,3}$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ |
| H=99     | $10^{4,3}$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ |

(b) Máximo

Tabela 2 – Tamanhos de caixas para  $L = 64$ .

| $\omega$ | 2   | 2.5 | 3   | 3.5 | 4    | 4.5  |
|----------|-----|-----|-----|-----|------|------|
| H=0.01   | 100 | 100 | 300 | 550 | 1000 | 5000 |
| H=99     | 50  | 150 | 250 | 550 | 1000 | 5000 |
| H=99     | 20  | 150 | 250 | 550 | 1000 | 5000 |

(a) Mínimo

| $\omega$ | 2          | 2.5        | 3          | 3.5    | 4      | 4.5    |
|----------|------------|------------|------------|--------|--------|--------|
| H=0.01   | $10^{3,2}$ | $10^{4,3}$ | $10^5$     | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ |
| H=0.5    | $10^{3,1}$ | $10^{4,1}$ | $10^{4,8}$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ |
| H=99     | $10^{3,1}$ | $10^{4,1}$ | $10^{4,8}$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ |

(b) Máximo

Tabela 3 – Tamanhos de caixas para  $L = 128$ .

| $\omega$ | 3  | 3.5 | 4   | 4.5 | 5    | 5.5  |
|----------|----|-----|-----|-----|------|------|
| H=0.01   | 20 | 150 | 150 | 550 | 1100 | 5000 |
| H=0.5    | 20 | 150 | 150 | 350 | 1500 | 5000 |
| H=99     | 20 | 100 | 150 | 600 | 1500 | 5000 |

(a) Mínimo

| $\omega$ | 3          | 3.5        | 4      | 4.5    | 5      | 5.5    |
|----------|------------|------------|--------|--------|--------|--------|
| H=0.01   | $10^4$     | $10^{4,5}$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ |
| H=0.5    | $10^{3,8}$ | $10^{4,5}$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ |
| H=99     | $10^{3,8}$ | $10^{4,2}$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ | $10^5$ |

(b) Máximo

Tabela 4 – Tamanho de caixas para  $L = 256$ .

### 4.3 DFA

Com as séries temporais obtidas, aplicamos o método **DFA** para a análise de correlação predominante do sistema. Os resultados do **DFA** são obtidos através de uma lei de potência segundo a Equação 3.9. Mostramos o caso para  $H = 0,01$  na Figura 31. Os demais resultados estão apresentados no apêndice A.1.

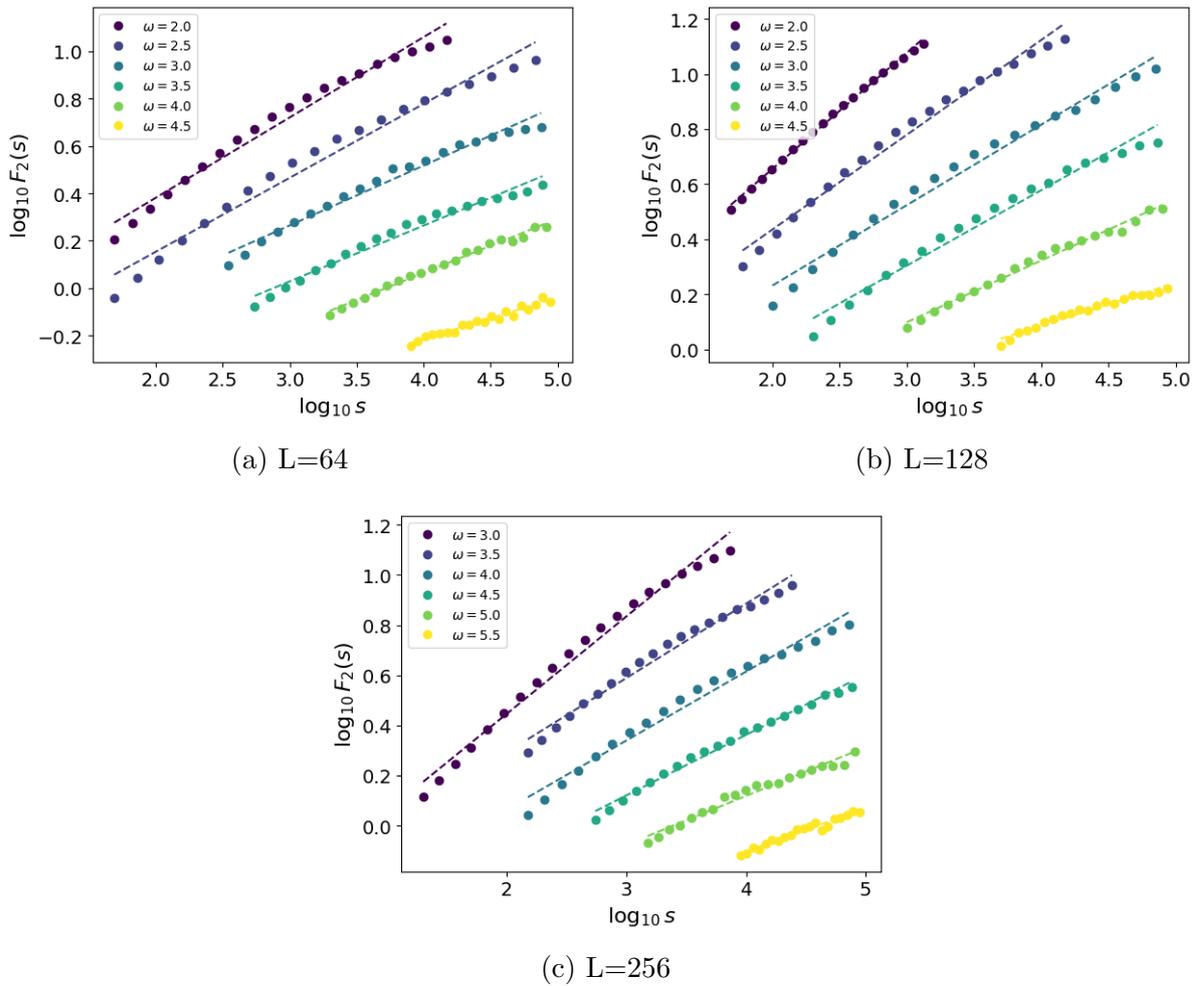


Figura 31 – Gráfico da lei de potência 3.9 obtido pelo método **DFA** aplicado à série temporal da diversidade de espécies. Com um expoente de Hurst fixo em  $H = 0,01$ , os tamanhos dos lados da rede  $L$  são descritos na legenda de cada Figura.

A partir dos resultados expostos na Figura 31 podemos, por meio de um ajuste linear, obter o valor do expoente de Hurst do sistema, que são mostrados na Figura 32. A mesma mostra a variação da correlação,  $h(2)$ , com a taxa de mutação  $\nu$  para os tamanhos de lado da rede.

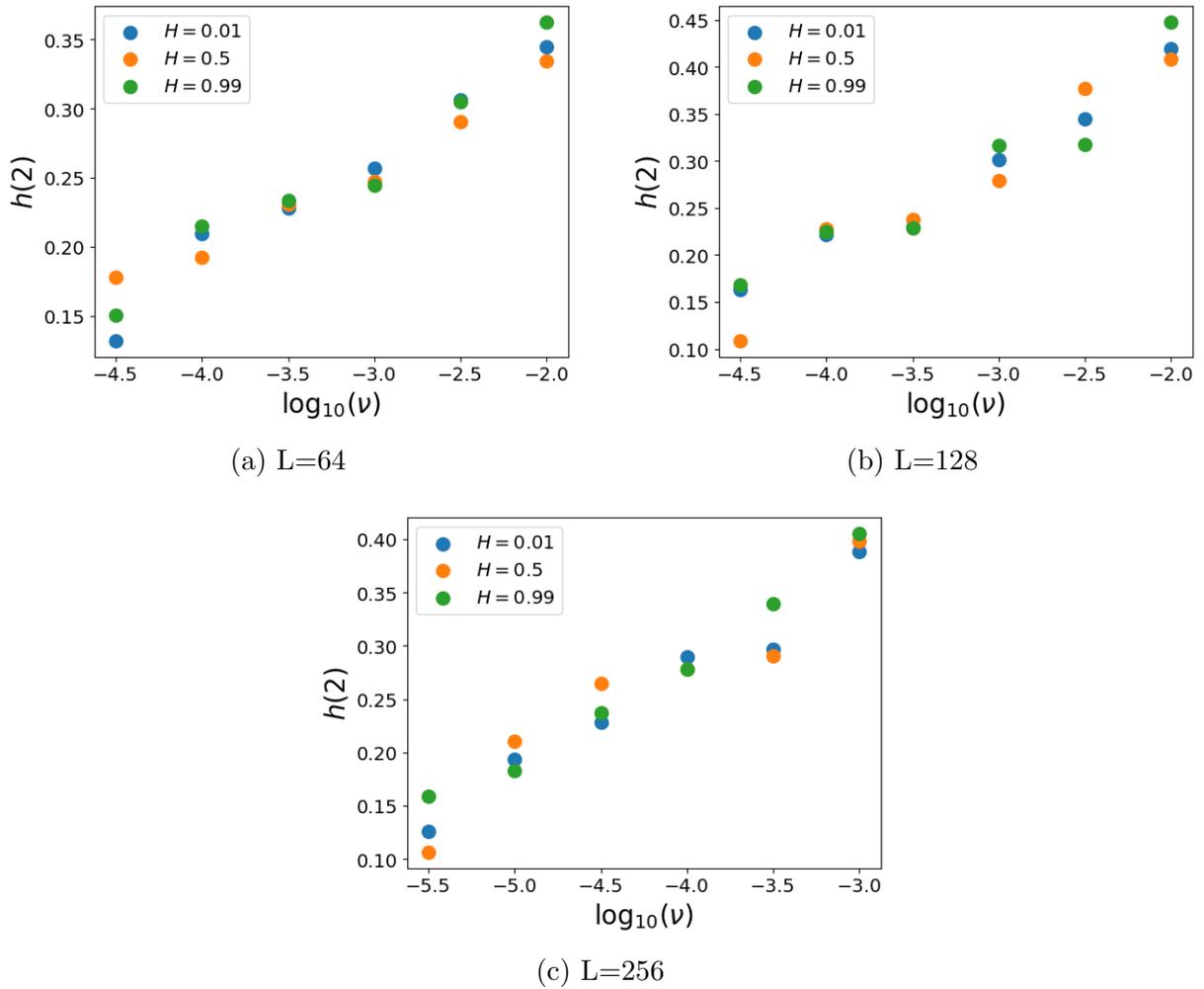


Figura 32 – Gráficos de correlação em função do logaritmo na base dez da taxa de mutação  $\nu$ , obtidos através do método DFA aplicado à série temporal da diversidade de espécies. O expoente de Hurst é mantido constante em  $H = 0.01$ , com os tamanhos de lado da rede  $L$  indicados na legenda de cada gráfico.

Antes de analisarmos os resultados expostos na Figura 32 é preciso estabelecer a intensidade da anticorrelação. Quanto mais próximo a 0.5, menor é a anticorrelação pois se aproxima de um sistema aleatório ou descorrelacionado. Logo, podemos perceber na Figura 32 que ao aumentarmos a taxa de mutação o sistema tende a diminuir a anticorrelação. Uma das possibilidades de explicação desse fenômeno são pelas frequências das variações da série. Com taxa de mutações mais baixas tende-se a ter menos variações e quando as mesmas acontecem tornam-se grandes quando comparadas a média da série. Para séries com maior taxa de mutação as variações são mais frequentes, porém não se distanciam muito da média da série quando pensamos em termos de proporção. Podemos citar um exemplo para uma série de taxa de mutação alta se tivermos uma média de 120 espécies e uma variação de 20 espécies de um passo de tempo para outro, isso representa uma variação de 16%. Enquanto se tivermos uma série com média de 5 espécies e uma variação de 2 espécies de um passo de tempo para o outro isso simboliza uma variação de 40%.

Podemos generalizar o resultado do DFA para outros momentos com o MF-DFA para assim verificarmos se o nosso sistema contém múltiplas correlações.

## 4.4 MF-DFA: Análise de Multifractalidade

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos através da aplicação do método MF-DFA.

### 4.4.1 Expoente de Hurst generalizado $h(q)$

Na Figura 33 mostramos o expoente de Hurst generalizado, o mesmo pode dar um indício da multifractalidade do sistema, caso apresente uma variação com os momentos  $q$ .

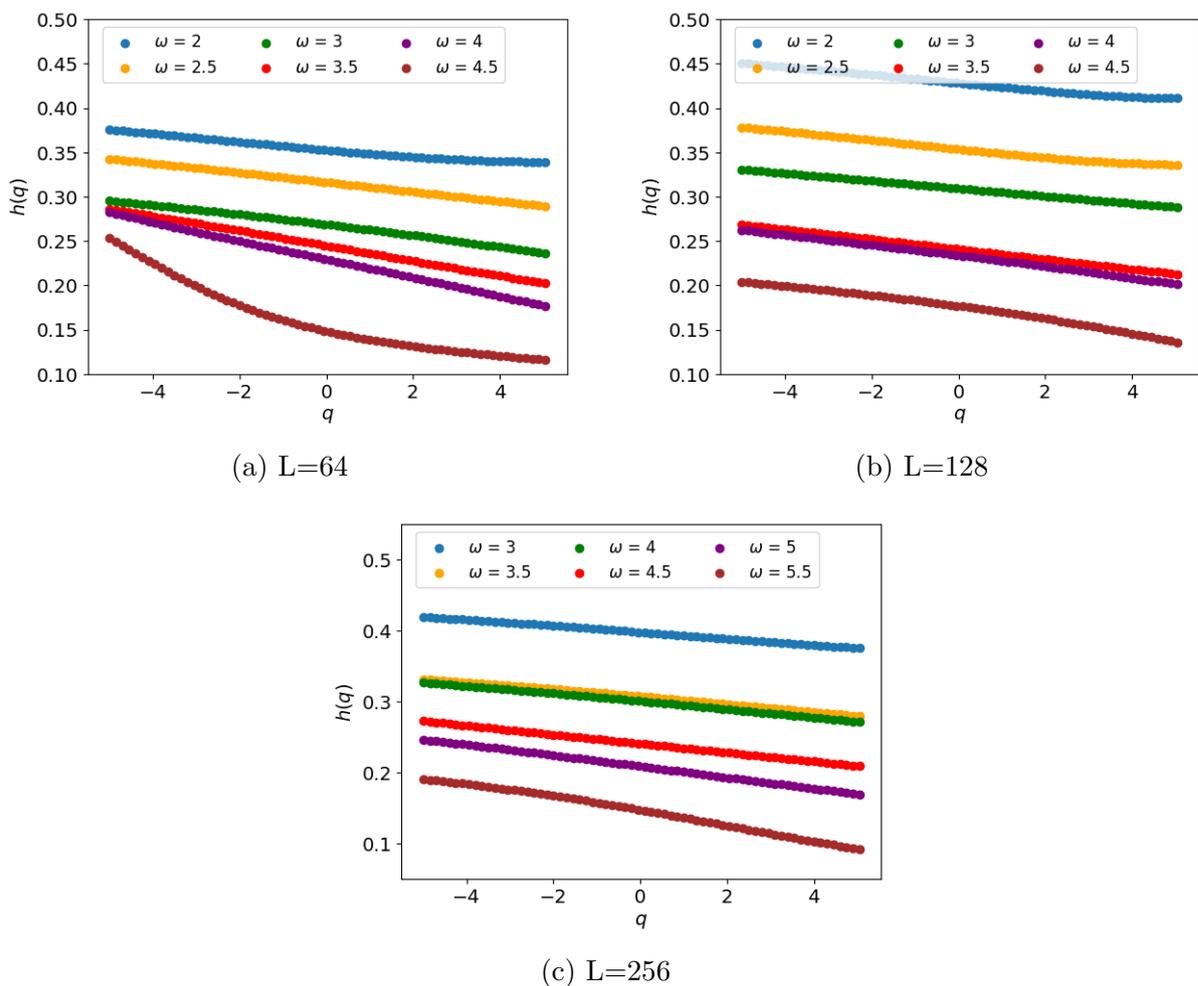


Figura 33 – Gráficos do expoente de Hurst generalizado em função dos momentos,  $h(q) \times q$ , para a série temporal da diversidade de espécies. O expoente de Hurst é fixo em  $H = 0.5$  e os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico.

Como podemos notar, há uma leve inclinação nas curvas. Logo, podemos inferir que esse sistema pode apresentar multifractalidade. Ao alterar a taxa de mutação  $\nu$

(representada pelo expoente  $\omega$  nas legendas do gráfico) verificamos que a inclinação do gráfico aumenta com o valor de  $\omega$ , mostrando assim uma possível dependência da multifractalidade com a taxa de mutação. Verificamos que esse comportamento se repete para todos os tamanhos de redes.

#### 4.4.2 Expoente de escala multifractal $\tau(q)$

O Expoente de escala multifractal,  $\tau(q)$ , pode ser interpretado como uma maneira mais clara de visualização de uma multifractalidade pela linearidade da função; quanto mais linear menos a multifractalidade é atuante no sistema.

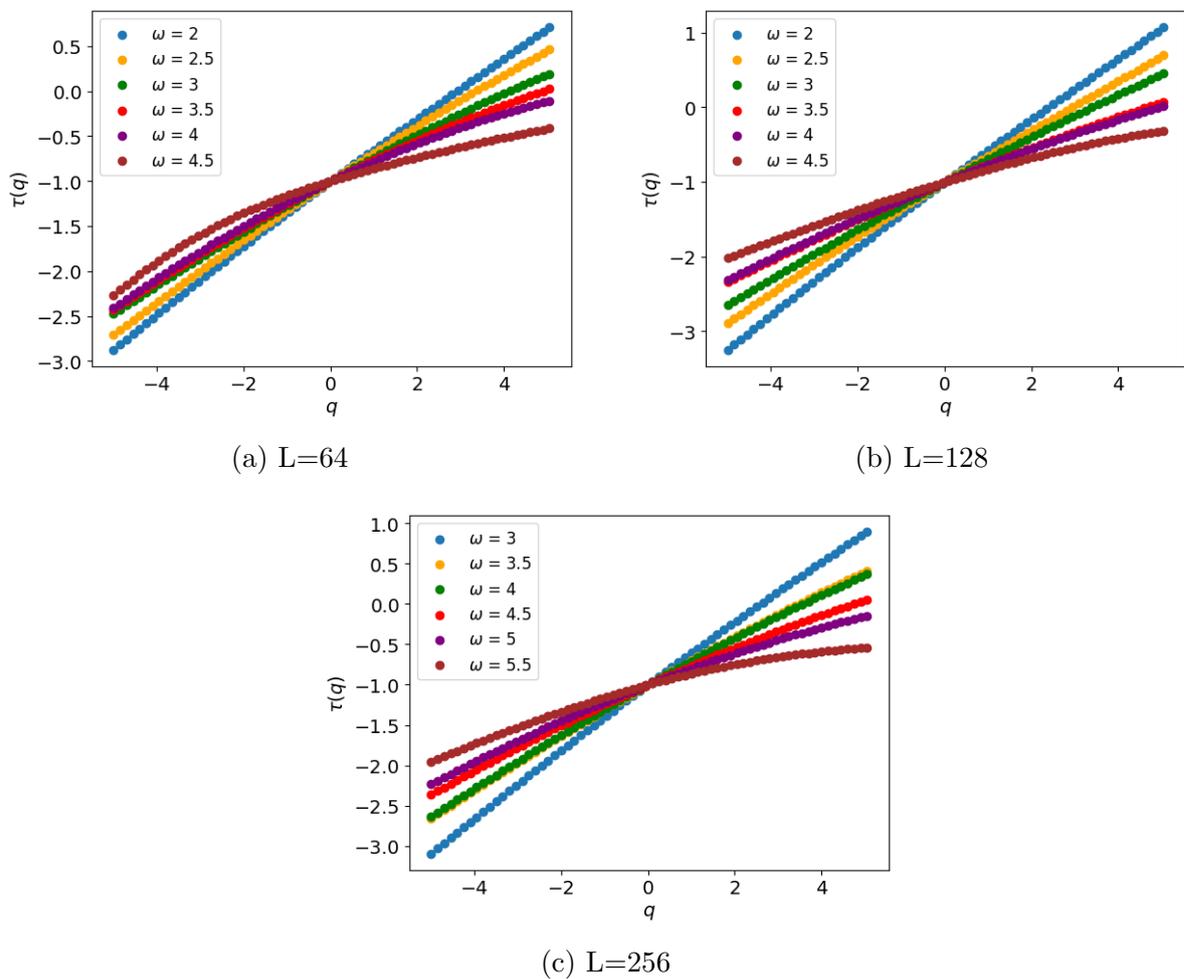


Figura 34 – Gráfico do expoente de escala multifractal em função dos momentos,  $\tau(q) \times q$ , para a série temporal da diversidade de espécies. Com expoente de Hurst fixo em  $H = 0.5$ , os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico.

A função  $\tau(q)$  pode ser interpretada de maneira monofractal, ou com multifractalidade fraca, quando a mesma se aproxima de uma função afim, como podemos observar nos casos para  $\omega = 2$  e  $\omega = 2,5$  para as Figuras 34a e 40 e  $\omega = 3$  e  $\omega = 3,5$  para a Figura 34c. Por outro lado, se a função  $\tau(q)$  apresentar uma curvatura, a mesma pode ser

interpretada como tendo uma multifractalidade mais forte, como podemos verificar para  $\omega = 4$  e  $\omega = 4,5$  nas Figuras 34a e 40 e  $\omega = 5$ ,  $\omega = 5,5$  na Figura 34c.

#### 4.4.3 Espectro de singularidade $D(\alpha)$

O espectro de singularidade  $D(\alpha)$  é o indicativo mais claro de multifractalidade, do qual podemos obter um indicativo numérico da mesma, dada a abertura da parábola. Em alguns sistemas pode ser clara a diferença de abertura da parábola de  $D(\alpha)$ , sendo assim o conjunto de gráficos como os da Figura 35 suficiente para definir se um sistema é mais ou menos multifractal.

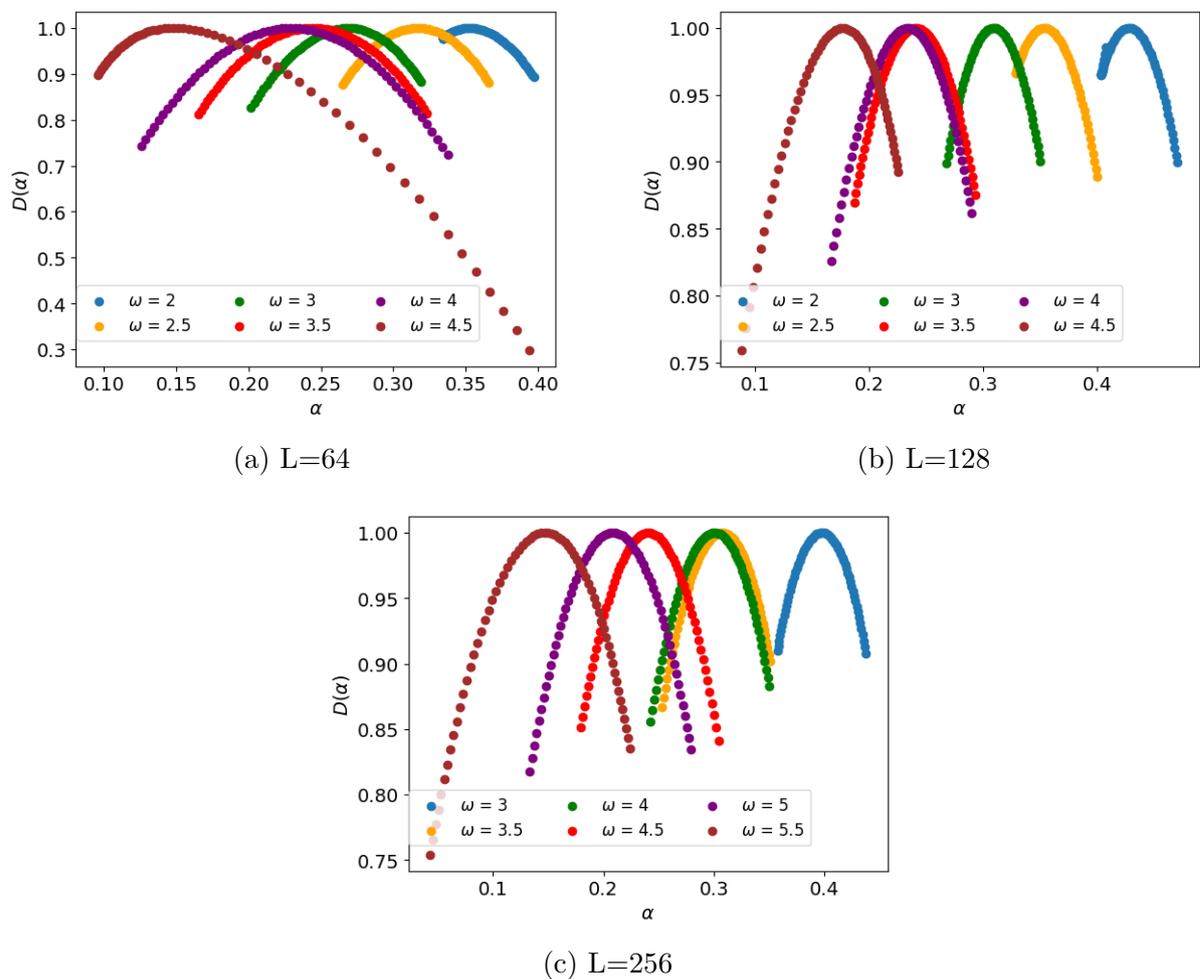


Figura 35 – Gráfico do espectro de singularidade em função do fator de intensidade de singularidade,  $D(\alpha)$  em relação a  $\alpha$ , para a série temporal da diversidade das espécies. Com expoente de Hurst fixo em  $H = 0.01$ , os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico.

Podemos inferir a intensidade da multifractalidade por meio da abertura da parábola do espectro de singularidade,  $D(\alpha)$ . No entanto, por muitas vezes parece um pouco confuso e complicado a visualização da mesma somente comparando as aberturas das parábolas

nos gráficos apresentados na Figura 35. Isso nos levou a análise da largura do multifractal,  $\Delta\alpha$  como é mostrado na Figura 36.

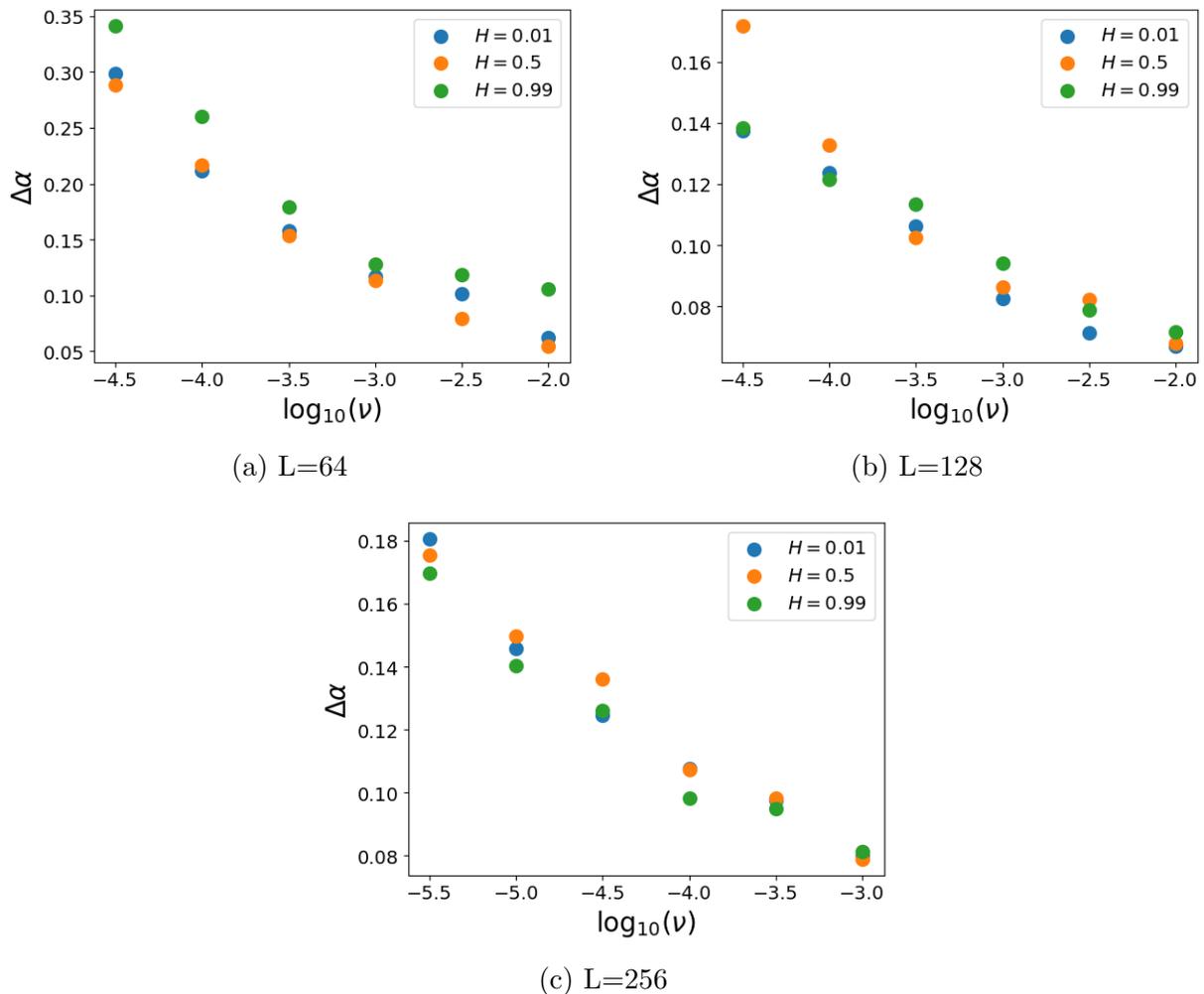


Figura 36 – Gráficos da variação da intensidade de singularidade  $\Delta\alpha$  em função do logaritmo da taxa de mutação para a série temporal da diversidade das espécies. Com expoente de Hurst fixo em  $H = 0.5$ , os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico.

Antes de tomar alguma conclusão ou pretender supor alguma causa para os fenômenos apresentados na Figura 35, precisamos aplicar o embaralhamento da série, para assim termos certeza de que a multifractalidade da série é devida às múltiplas correlações existentes no sistema. Como é possível perceber, os resultados seguem os mesmos padrões para todos sistemas, independentes do tamanho da rede ou expoente de Hurst, logo, faremos o teste apenas para um sistema generalizando o resultado para todos.

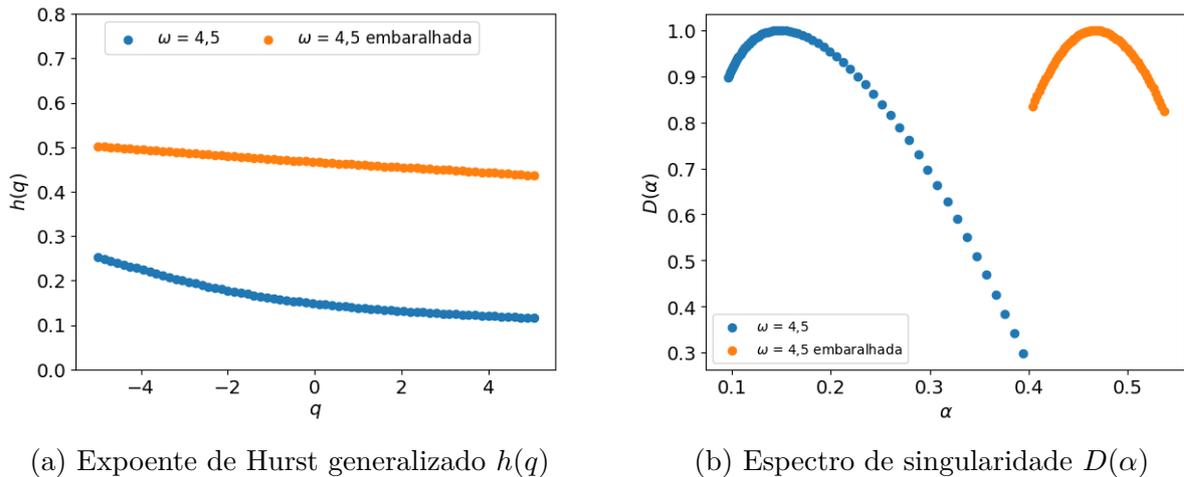


Figura 37 – Embaralhamento de série para a série com  $\nu = 10^{-4,5}$ ,  $L = 64$  e  $H = 0.1$ .

Ao obter o resultado do embaralhamento podemos perceber que a multifractalidade diminui e o grau de correlação tende a ficar mais próximo do aleatório,  $h(q) = 0.5$ . Esse comportamento mostra que a multifractalidade é devida aos múltiplos graus de correlação existentes no sistema como mostra [62] na sua definição do **MF-DFA**.

Os resultados apresentados na Figura 37 mostram que quando diminuimos a taxa de mutação há um aumento da multifractalidade. Podemos relacionar esse resultado com o obtido anteriormente, na Seção 4.3, que quando diminuimos a taxa de mutação aumentamos o grau de anticorrelação. Podemos inferir que a anticorrelação e a multifractalidade coexistem no sistema. A multifractalidade, neste caso, está relacionada à presença de múltiplas correlações para flutuações longas e curtas. Como menciona [62] para o caso que a multifractalidade diminui com o embaralhamento, as correlações de longo alcance são destruídas pelo procedimento de embaralhamento, assim, tornando a série com a multifractalidade menos intensa.

O comportamento multifractal das séries temporais da diversidade está relacionado à presença de diferentes correlações de longo alcance para flutuações mais fracas e mais intensas. Dessa forma, além das séries serem anticorrelacionadas, conforme indicado pelo valor do expoente de escala de  $F_2(s)$ , elas apresentam infinitos expoentes de escala, associados às funções  $F_q(s)$  para valores reais  $q$  diferentes de 2, como podemos visualizar no gráfico de  $h(q)$  na Figura 33. Além disso, observamos de maneira mais clara os resultados da multifractalidade na Figura 36, que demonstra que a mesma apresenta uma variação com a taxa de mutação  $\nu$ , de forma que quando aumentamos a taxa de mutação diminuímos a intensidade da multifractalidade no sistema.

Nas análises realizadas, notamos que à medida que a taxa de mutação  $\nu$  diminui, as séries passam de um regime descorrelacionado para anticorrelacionado, Figura 32, ao mesmo tempo que apresentam uma multifractalidade mais forte, Figura 36. Sendo assim, pode-se imaginar a existência de um mecanismo adjacente ao processo de competição

por recursos que é mais intenso à medida que a taxa de mutação é reduzida e induz anticorrelações de longo alcance e multifractalidade ao mesmo tempo no sistema.

## 5 Conclusão

Neste trabalho tivemos como objetivo principal entender melhor as propriedades de um sistema em que espécies competem por recursos. Para isso utilizamos um modelo computacional, introduzido previamente na literatura, com uma dinâmica baseada em conceitos biológicos no qual podemos variar a heterogeneidade dos ambientes através da distribuição de recursos. Além disso, o modelo possibilita o estudo da variabilidade das espécies devido às mutações.

Em um estudo anterior desse modelo, uma análise do comportamento da distribuição das flutuações da evolução temporal da diversidade indicou que o sistema possui memória para probabilidades de mutação baixas. Portanto, é inerente que surjam perguntas devido a esse resultado. Que tipo de memória é essa? Sobre qual outro aspecto essa memória pode influenciar? O que pode significar em termos biológicos?

Para responder algumas dessas perguntas utilizamos o [DFA](#) e [MF-DFA](#), que consiste na análise de correlações de longo alcance em séries temporais.

No estudo do DFA podemos perceber um sistema anticorrelacionado para todas as variações dos parâmetros utilizados. No entanto podemos perceber outro comportamento comum, que é independente do expoente de Hurst  $H$  e do tamanho do lado da rede  $L$ , que é a diminuição da anticorrelação quando aumentamos a taxa de mutação  $\nu$ , aparentemente seguindo uma escala linear quando visto em relação ao expoente de mutação  $\omega$ .

No estudo do MF-DFA foi observado inicialmente uma variabilidade dos tamanhos de caixas, mostrando que as frequências de variações do sistemas mudam drasticamente, mostrando períodos de estagnação da diversidade. Além disso, foi constatado a diminuição da multifractalidade quando aumentamos a taxa de mutação  $\nu$ , sendo esse resultado independente do expoente de Hurst  $H$  ou tamanho do lado da rede  $L$ .

Esse trabalho abre portas para diversas investigações como, por exemplo, o estudo do efeito de se mudar a variância da distribuição utilizada para obtenção das constantes de meia saturação das novas espécies sobre a multifractalidade. Essa mudança pode modificar a intensidade da diferença entre as espécies após os eventos de mutação, podendo assim levar a alterações no comportamento da série temporal. É possível também pensar em análises de multifractalidade diversas, como explorar as fases estacionárias e de crescimento da série temporal da diversidade, visto que ambas apresentam formas diferentes. Assim como a utilização de outras ferramentas de exploração dos resultados obtidos como o do parâmetro de inclinação  $r = \frac{\alpha_{\max} - \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_{\min}}$ , o qual indica quais tipos de flutuações dominam o sistema, de curta ou longa escalas, onde  $\alpha_0$  é pico de  $D(\alpha)$ .

Outra continuação proposta para esse trabalho é diversificar as relações ecológicas. Como primeiro passo poderia se pensar em um sistema com predação, pois podemos ter um modelo mais cíclico de espécies com extinções mais frequentes trazendo assim uma nova dinâmica ao modelo. Também podemos pensar nas modificações em relação ao trade-off. Por exemplo, podemos introduzir um trade-off que relacione a sobrevivência dos indivíduos com a dispersão no ambiente, tornando o modelo mais próximo da realidade.

# Referências

- [1] Priyanka Katyal, PRATIMA GUPTA, NIKHITA GULATI, and HEMANT JAIN. A compendium of fibonacci ratio. *Journal of Clinical & Diagnostic Research*, 13(11), 2019.
- [2] Jacques Monod. The growth of bacterial cultures. *Annual review of microbiology*, 3(1):371–394, 1949.
- [3] Colin R Townsend, Michael Begon, and John L Harper. *Fundamentos em ecologia*. Artmed Editora, 2009.
- [4] James Maclaurin and Kim Sterelny. *What is biodiversity?* University of Chicago Press, 2008.
- [5] Mirka Laurila-Pant, Annukka Lehikoinen, Laura Uusitalo, and Riikka Venesjärvi. How to value biodiversity in environmental management? *Ecological indicators*, 55:1–11, 2015.
- [6] Manejo de plantas daninhas na cultura do milho. *Jornal Dia de Campo*. <http://www.diadecampo.com.br/zpublisher/materias/Newsletter.asp?data=12/07/2010id=22140>
- [7] Job Kuijt et al. The biology of parasitic flowering plants. university of california press, berkeley. *The biology of parasitic flowering plants. University of California Press, Berkeley.*, 1969.
- [8] Charles Darwin. A origem das espécies, 2009.
- [9] EM De Robertis. Evo-devo: variations on ancestral themes. *Cell*, 132(2):185–195, 2008.
- [10] Jianzhi Zhang. Evolution by gene duplication: an update. *Trends in ecology & evolution*, 18(6):292–298, 2003.
- [11] Antonio Di Ieva, Fabio Grizzi, Herbert Jelinek, Andras J Pellionisz, and Gabriele Angelo Losa. Fractals in the neurosciences, part i: general principles and basic neurosciences. *The Neuroscientist*, 20(4):403–417, 2014.
- [12] Marcelo B Ribeiro and Alexandre Y Miguelote. Fractals and the distribution of galaxies. *Brazilian journal of physics*, 28(2):132–160, 1998.
- [13] Jens Feder. *Fractals*. Springer Science & Business Media, 2013.

- [14] John Graunt. 1662 natural and political observations made upon the bills of mortality. *London*, 12:24–35, 1939.
- [15] Edmond Halley. Vi. an estimate of the degrees of the mortality of mankind; drawn from curious tables of the births and funerals at the city of breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 17(196):596–610, 1973.
- [16] Karl Marx. *O Capital-Livro 1: Crítica da economia política. Livro 1: O processo de produção do capital*. Boitempo Editorial, 2015.
- [17] Nicolas Bacaër. *A short history of mathematical population dynamics*, volume 618. Springer, 2011.
- [18] Pete Smith. Malthus is still wrong: we can feed a world of 9–10 billion, but only by reducing food demand. *Proceedings of the Nutrition Society*, 74(3):187–190, 2015.
- [19] David P Smith, Nathan Keyfitz, and Pierre-François Verhulst. A note on the law of population growth. *Mathematical Demography: Selected Papers*, pages 333–339, 1977.
- [20] Patricia Román-Román and Francisco Torres-Ruiz. Modelling logistic growth by a new diffusion process: Application to biological systems. *Biosystems*, 110(1):9–21, 2012.
- [21] Phillip Stroud, Sara Del Valle, Stephen Sydoriak, Jane Riese, and Susan Mniszewski. Spatial dynamics of pandemic influenza in a massive artificial society. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 10(4):9, 2007.
- [22] Lourdes Arizpe. The rural exodus in mexico and mexican migration to the united states. *International Migration Review*, 15(4):626–649, 1981.
- [23] Judith Stephenson, Karen Newman, and Susannah Mayhew. Population dynamics and climate change: what are the links? *Journal of Public Health*, 32(2):150–156, 2010.
- [24] George L Clarke. *Elements of ecology*, volume 79. LWW, 1955.
- [25] Sara Lucia Castillo DAZA et al. Modelagem computacional de ecossistemas com competição por recursos e evolução em ambientes heterogêneos. 2020.
- [26] Lamarckismo in:. Dicionário Online de Português, 2024-01-22. <https://www.dicio.com.br/lamarckismo/#:~:text=Significado%20de%20Lamarckismo,comportamento%20e%20sobre%20os%20C%C3%B3rg%C3%A3os.>

- [27] Guillermo Navalón, Jen A Bright, Jesús Marugán-Lobón, and Emily J Rayfield. The evolutionary relationship among beak shape, mechanical advantage, and feeding ecology in modern birds. *Evolution*, 73(3):422–435, 2019.
- [28] Kenneth R Young and Blanca León. Pteridophyte species diversity in the central peruvian amazon: importance of edaphic specialization. *Brittonia*, 41:388–395, 1989.
- [29] Thomas J Givnish, Michael HJ Barfuss, Benjamin Van Ee, Ricarda Riina, Katharina Schulte, Ralf Horres, Philip A Gonsiska, Rachel S Jabaily, Darren M Crayn, J Andrew C Smith, et al. Adaptive radiation, correlated and contingent evolution, and net species diversification in bromeliaceae. *Molecular phylogenetics and evolution*, 71:55–78, 2014.
- [30] Susan GW Laurance, William F Laurance, Ana Andrade, Philip M Fearnside, Kyle E Harms, Alberto Vicentini, and Regina CC Luizão. Influence of soils and topography on amazonian tree diversity: a landscape-scale study. *Journal of Vegetation Science*, 21(1):96–106, 2010.
- [31] Byron K Williams. Adaptive management of natural resources—framework and issues. *Journal of environmental management*, 92(5):1346–1353, 2011.
- [32] Joanna Burger. Environmental management: Integrating ecological evaluation, remediation, restoration, natural resource damage assessment and long-term stewardship on contaminated lands. *Science of the Total Environment*, 400(1-3):6–19, 2008.
- [33] R Simpson, A Jaques, H Nuñez, C Ramirez, and A Almonacid. Fractional calculus as a mathematical tool to improve the modeling of mass transfer phenomena in food processing. *Food Engineering Reviews*, 5:45–55, 2013.
- [34] Paul B Rainey and Michael Travisano. Adaptive radiation in a heterogeneous environment. *Nature*, 394(6688):69–72, 1998.
- [35] Pia Anderwald, Rudolf M Haller, and Flurin Filli. Heterogeneity in primary productivity influences competitive interactions between red deer and alpine chamois. *PLoS One*, 11(1):e0146458, 2016.
- [36] Heraldo Antunes Silva Filho, Antônio Ricardo Mendes Barros, Elivânia Vasconcelos Moraes dos Santos, José Tavares de Sousa, and Adrianus Cornelius van Haandel. Seleção de substratos padrões para ensaios respirométricos aeróbios com biomassa de sistemas de lodo ativado. *Engenharia Sanitária e Ambiental*, 20:141–150, 2015.
- [37] Christian Mulder and A Jan Hendriks. Half-saturation constants in functional responses. *Global Ecology and Conservation*, 2:161–169, 2014.

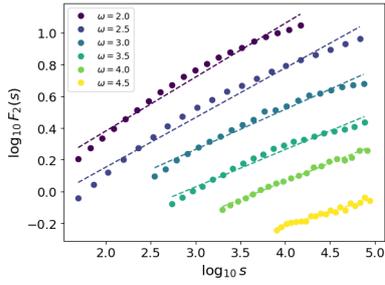
- [38] Richard W Eppley, Jane N Rogers, and James J McCarthy. Half-saturation constants for uptake of nitrate and ammonium by marine phytoplankton 1. *Limnology and oceanography*, 14(6):912–920, 1969.
- [39] Andrew Robeson Whitson and Harlow Leslie Walster. *Soils and soil fertility*. Webb Publishing Company, 1912.
- [40] Michael Danger, Tanguy Daufresne, Françoise Lucas, Serge Pissard, and Gérard Lacroix. Does liebigs law of the minimum scale up from species to communities? *Oikos*, 117(11):1741–1751, 2008.
- [41] Hugo Antonius van den Berg. Multiple nutrient limitation in unicellulars: reconstructing liebigs law. *Mathematical biosciences*, 149(1):1–22, 1998.
- [42] Walter P Taylor. Significance of extreme or intermittent conditions in distribution of species and management of natural resources, with a restatement of liebigs law of minimum. *Ecology*, 15(4):374–379, 1934.
- [43] Q Paris. The return of von liebigs “law of the minimum”. *Agronomy Journal*, 84(6):1040–1046, 1992.
- [44] T Legović and A Cruzado. A model of phytoplankton growth on multiple nutrients based on the michaelis-menten-monod uptake, droop’s growth and liebigs law. *Ecological Modelling*, 99(1):19–31, 1997.
- [45] Kristie Young, Michael Regan, and Mike Hammer. Driver distraction: A review of the literature. *Distracted driving*, 2007:379–405, 2007.
- [46] Robert M Cox, Elizabeth U Parker, Diane M Cheney, Andrea L Liebl, Lynn B Martin, and Ryan Calsbeek. Experimental evidence for physiological costs underlying the trade-off between reproduction and survival. *Functional Ecology*, 24(6):1262–1269, 2010.
- [47] Robin A Schwenke, Brian P Lazzaro, and Mariana F Wolfner. Reproduction–immunity trade-offs in insects. *Annual review of entomology*, 61:239–256, 2016.
- [48] Zuhua He, Shanice Webster, and Sheng Yang He. Growth–defense trade-offs in plants. *Current Biology*, 32(12):R634–R639, 2022.
- [49] Viviane M de Oliveira, Bárbara BC Mendes, Mateus Roque, and Paulo RA Campos. Extinction-colonization dynamics upon a survival-dispersal trade-off. *Ecological Complexity*, 43:100856, 2020.
- [50] Eduardo G Altmann and Holger Kantz. Recurrence time analysis, long-term correlations, and extreme events. *Physical Review E*, 71(5):056106, 2005.

- [51] Yannick Malevergne\*, Vladilen Pisarenko, and Didier Sornette. Empirical distributions of stock returns: between the stretched exponential and the power law? *Quantitative Finance*, 5(4):379–401, 2005.
- [52] Xiaojun Zhao, Pengjian Shang, and Yulei Pang. Power law and stretched exponential effects of extreme events in chinese stock markets. *Fluctuation and Noise Letters*, 9(02):203–217, 2010.
- [53] A Hacımlıyan, Y Skarlatos, G Sahin, K Atak, and OO Aybar. Possible stretched exponential parametrization for humidity absorption in polymers. *The European Physical Journal E*, 28:369–376, 2009.
- [54] Zhi Chen, Plamen Ch Ivanov, Kun Hu, and H Eugene Stanley. Effect of nonstationarities on detrended fluctuation analysis. *Physical review E*, 65(4):041107, 2002.
- [55] Sebastian Stach and Jerzy Cybo. Multifractal description of fracture morphology: theoretical basis. *Materials Characterization*, 51(1):79–86, 2003.
- [56] M Zamir. Critique of the test of multifractality as applied to biological data. *Journal of Theoretical Biology*, 225(3):407–412, 2003.
- [57] N. L. Pessoa, A. L. R. Barbosa, G. L. Vasconcelos, and A. M. S. Macedo. Multifractal magnetoconductance fluctuations in mesoscopic systems. *Phys. Rev. E*, 104:054129, Nov 2021.
- [58] Kazi Rafsanjani Amin, Ramya Nagarajan, Rahul Pandit, and Aveek Bid. Multifractal conductance fluctuations in high-mobility graphene in the integer quantum hall regime. *Phys. Rev. Lett.*, 129:186802, Oct 2022.
- [59] Antonio Romaguera, João Vasconcelos, Luis Negreiros-Neto, Nathan Pessoa, Jadson Silva, Pabyton Cadena, Adauto de Souza, Viviane de Oliveira, and ANDERSON BARBOSA. Multifractal fluctuations in zebrafish (danio rerio) polarization time series. *Available at SSRN 4652848*.
- [60] C-K Peng, Sergey V Buldyrev, Shlomo Havlin, Michael Simons, H Eugene Stanley, and Ary L Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Physical review e*, 49(2):1685, 1994.
- [61] SV Buldyrev, AL Goldberger, S Havlin, RN Mantegna, ME Matsa, C-K Peng, M Simons, and HE Stanley. Long-range correlation properties of coding and noncoding dna sequences: Genbank analysis. *Physical Review E*, 51(5):5084, 1995.
- [62] Jan W Kantelhardt, Stephan A Zschiegner, Eva Koscielny-Bunde, Shlomo Havlin, Armin Bunde, and H Eugene Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis

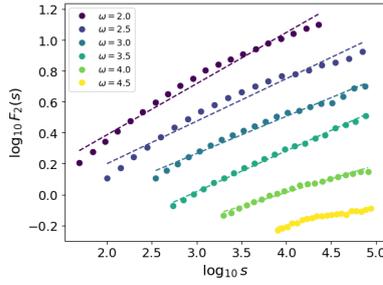
- of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1-4):87–114, 2002.
- [63] Guangxi Cao, Jie Cao, and Longbing Xu. Asymmetric multifractal scaling behavior in the chinese stock market: Based on asymmetric mf-dfa. *Physica A: statistical mechanics and its applications*, 392(4):797–807, 2013.
- [64] Jus Ksela, Viktor Avbelj, and Jurij Matija Kalisnik. Multifractality in heartbeat dynamics in patients undergoing beating-heart myocardial revascularization. *Computers in Biology and Medicine*, 60:66–73, 2015.
- [65] Naiming Yuan, Yan Huang, Jianping Duan, Congwen Zhu, Elena Xoplaki, and Jürg Luterbacher. On climate prediction: how much can we expect from climate memory? *Climate Dynamics*, 52:855–864, 2019.
- [66] Hasan Tatli and H Nüzhet Dalfes. Long-time memory in drought via detrended fluctuation analysis. *Water Resources Management*, 34:1199–1212, 2020.
- [67] DI Iudin and DB Gelashvily. Multifractality in ecological monitoring. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 502(2-3):799–801, 2003.
- [68] Laurent Seuront, François Schmitt, Yvan Lagadeuc, Daniel Schertzer, and Shaun Lovejoy. Universal multifractal analysis as a tool to characterize multiscale intermittent patterns: example of phytoplankton distribution in turbulent coastal waters. *Journal of Plankton Research*, 21(5), 1999.
- [69] Bruno Mendes Tenorio, Eurípedes Alves da Silva Filho, Gentileza Santos Martins Neiva, Valdemiro Amaro da Silva, Fernanda das Chagas Angelo Mendes Tenorio, Themis de Jesus da Silva, Emerson Carlos Soares e Silva, and Romildo de Albuquerque Nogueira. Can fractal methods applied to video tracking detect the effects of deltamethrin pesticide or mercury on the locomotion behavior of shrimps? *Ecotoxicology and environmental safety*, 142:243–249, 2017.
- [70] John Harte, Ann Kinzig, and Jessica Green. Self-similarity in the distribution and abundance of species. *Science*, 284(5412):334–336, 1999.
- [71] Jean-François Muzy, Emmanuel Bacry, and Alain Arneodo. Multifractal formalism for fractal signals: The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method. *Physical review E*, 47(2):875, 1993.
- [72] Benoit B Mandelbrot and John W Van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, 10(4):422–437, 1968.

# APÊNDICE A – Resultados

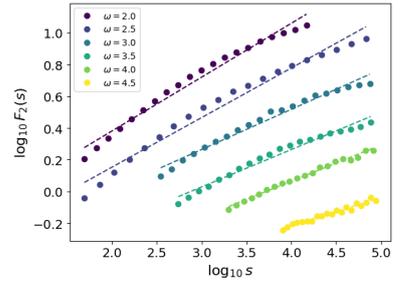
## A.1 Resultados $F_2(s)$



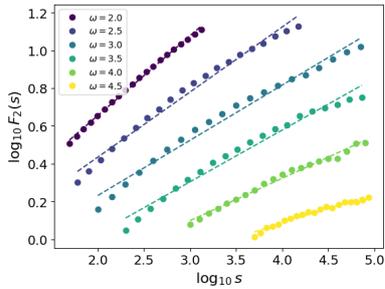
(a)  $L = 64, H = 0.01$



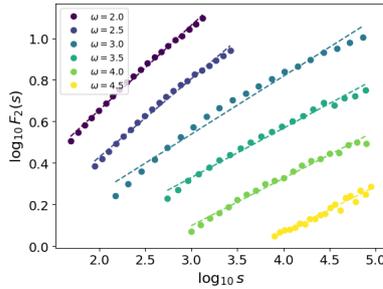
(b)  $L = 64, H = 0.5$



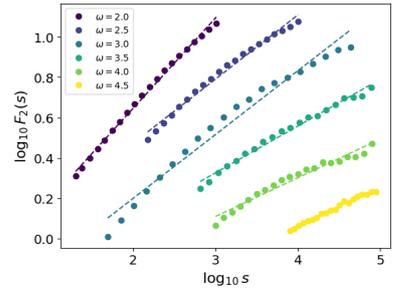
(c)  $L = 64, H = 0.99$



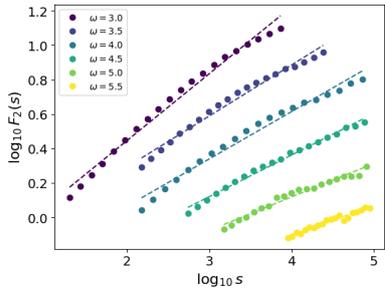
(d)  $L = 128, H = 0.01$



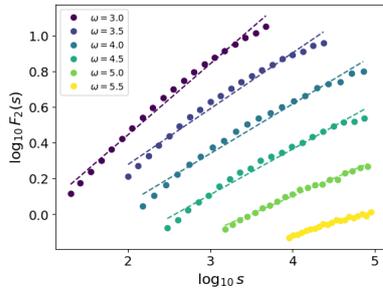
(e)  $L = 128, H = 0.5$



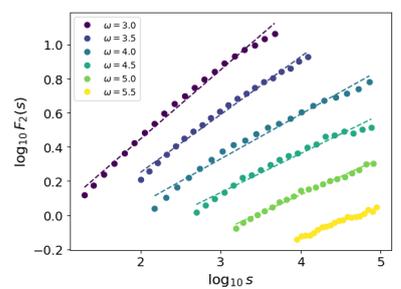
(f)  $L = 128, H = 0.99$



(g)  $L = 256, H = 0.01$



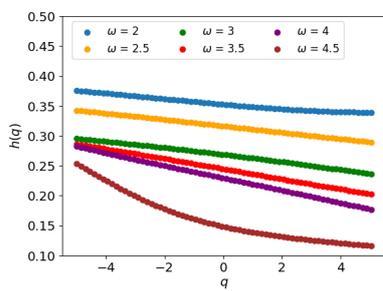
(h)  $L = 256, H = 0.5$



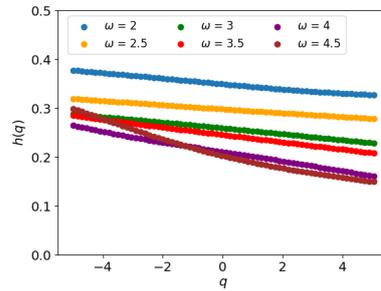
(i)  $L = 256, H = 0.99$

Figura 38 – Gráfico da lei de potência 3.9 obtido pelo método DFA aplicado à série temporal da diversidade de espécies, para vários expoentes de mutação  $\omega$  descritos nas legendas internas de cada gráfico. O expoente de Hurst  $H = 0.5$  e os tamanhos dos lados da rede  $L$  estão descritos na legenda de cada figura.

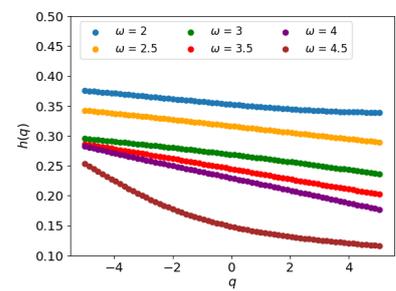
## A.2 Resultados $h(q)$



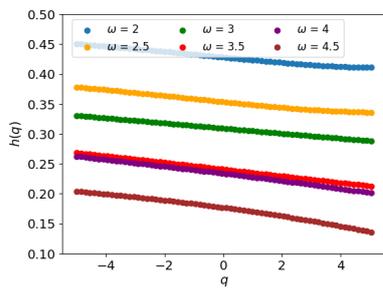
(a)  $L = 64, H = 0.01$



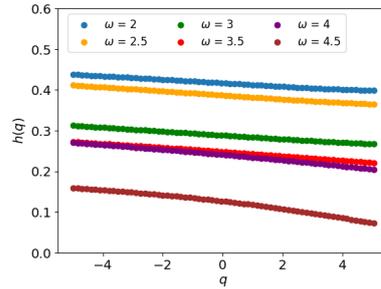
(b)  $L = 64, H = 0.5$



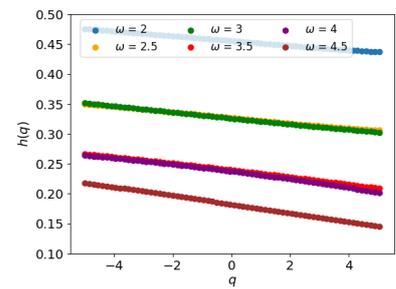
(c)  $L = 64, H = 0.99$



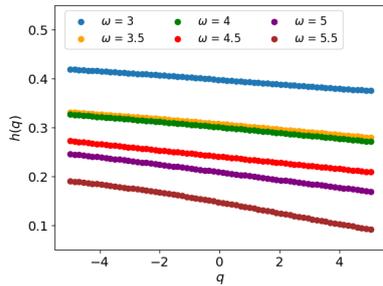
(d)  $L = 128, H = 0.01$



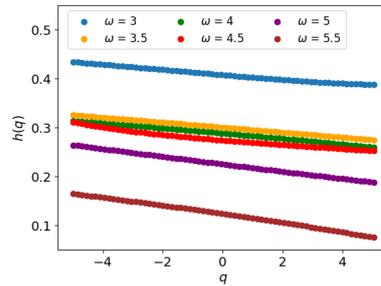
(e)  $L = 128, H = 0.5$



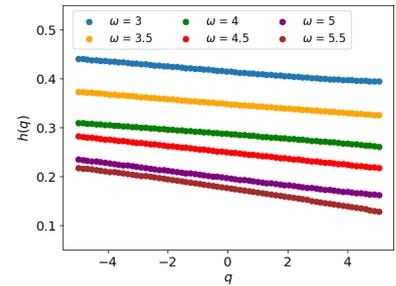
(f)  $L = 128, H = 0.99$



(g)  $L = 256, H = 0.01$



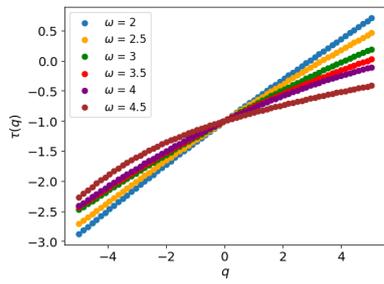
(h)  $L = 256, H = 0.5$



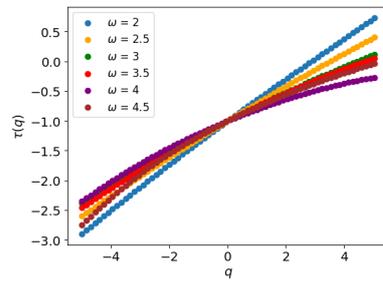
(i)  $L = 256, H = 0.99$

Figura 39 – Gráficos do expoente de Hurst generalizado em função dos momentos,  $h(q) \times q$ , para a série temporal da diversidade de espécies, para vários expoentes de mutação  $\omega$  descrito nas legendas internas de cada gráfico. O expoente de Hurst  $H = 0.5$  e os tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico.

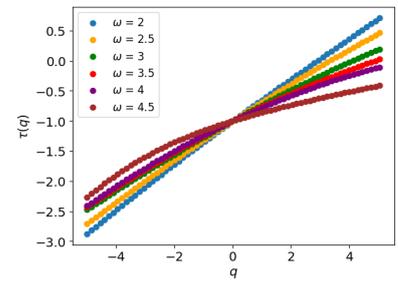
### A.3 Resultados $\tau(q)$



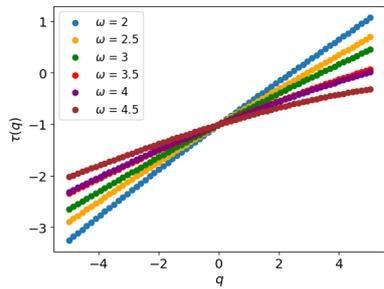
(a)  $L = 64, H = 0.01$



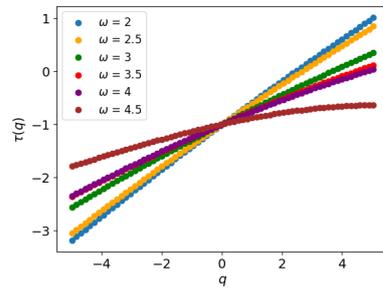
(b)  $L = 64, H = 0.5$



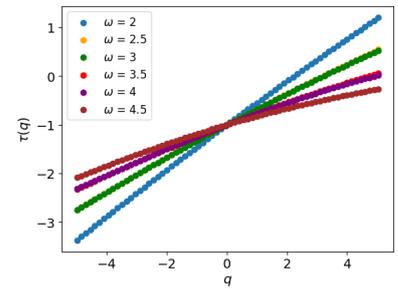
(c)  $L = 64, H = 0.99$



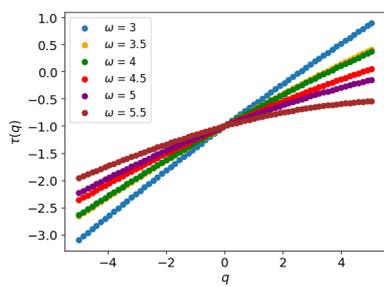
(d)  $L = 128, H = 0.01$



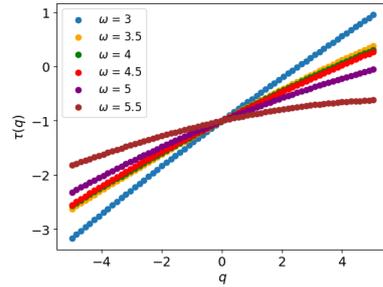
(e)  $L = 128, H = 0.5$



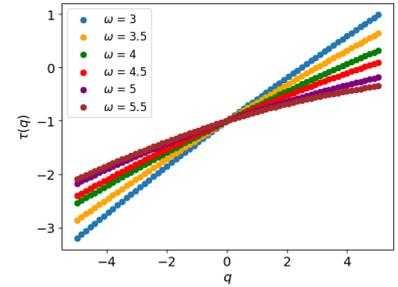
(f)  $L = 128, H = 0.99$



(g)  $L = 256, H = 0.01$



(h)  $L = 256, H = 0.5$



(i)  $L = 256, H = 0.99$

Figura 40 – Gráficos do expoente de escala multifractal em função dos momentos,  $\tau(q) \times q$ , para a série temporal da diversidade de espécies, para vários expoentes de mutação  $\omega$  descritos nas legendas internas de cada gráfico. O expoente de Hurst e tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico.

### A.4 Resultados $D(\alpha)$

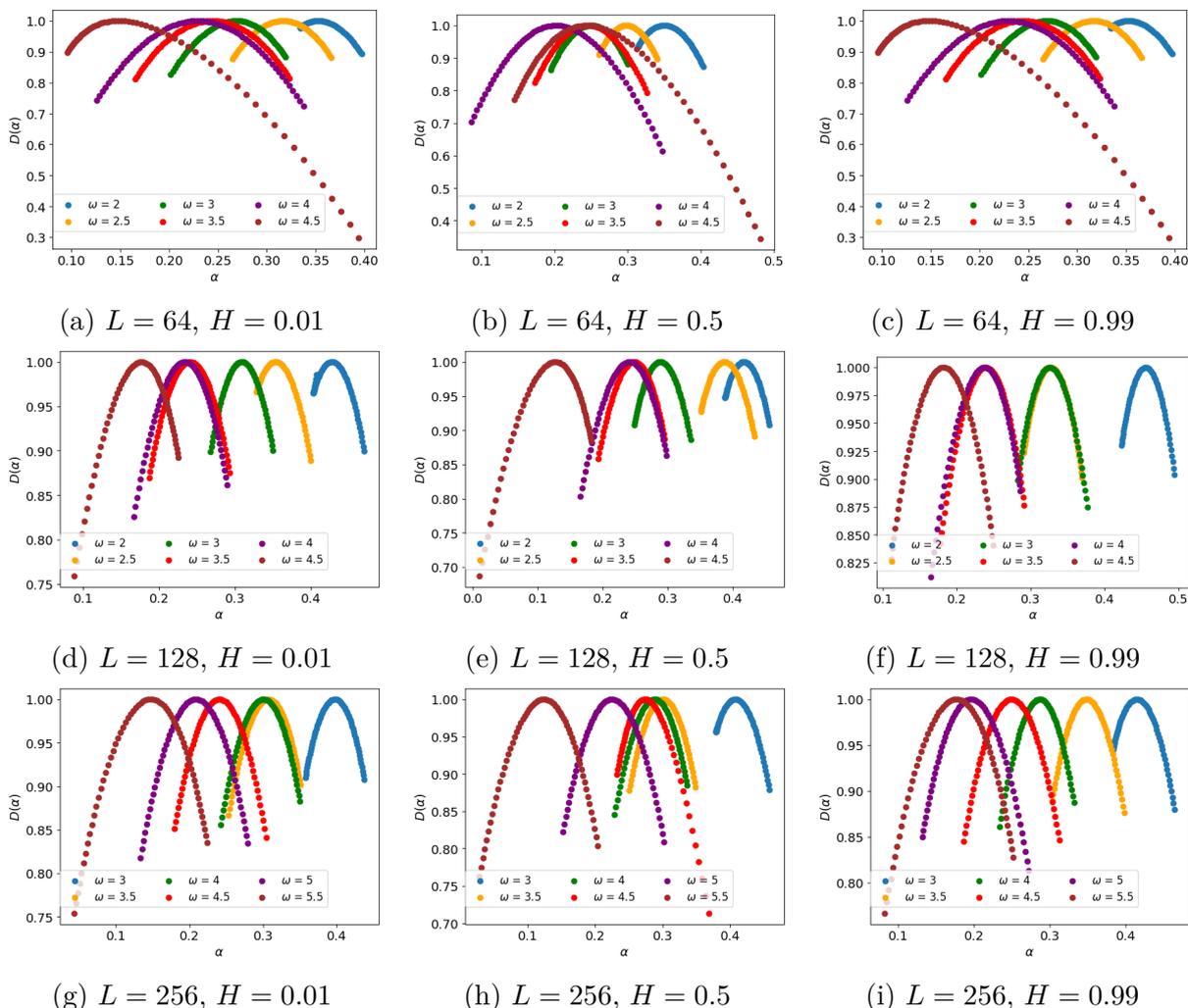


Figura 41 – Gráficos do espectro de singularidade em função do fator de intensidade de singularidade,  $D(\alpha)$  em relação a  $\alpha$ , para a série temporal da diversidade de espécies, para vários expoente de mutação  $\omega$  descritos nas legendas internas de cada gráfico. O expoente de Hurst e tamanhos de lado de rede  $L$  estão descritos na legenda de cada gráfico.