



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física

Pós Graduação em Física Aplicada

**Abordagem de Movimento Browniano
para os Ensembles Circulares da Teoria de
Matrizes Aleatórias: Do Limite Quântico
Extremo ao Regime Semiclássico.**

Emerson José Freitas da Silva

Dissertação de Mestrado

Recife

23 de Agosto de 2017

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Física

Emerson José Freitas da Silva

**Abordagem de Movimento Browniano para os Ensembles
Circulares da Teoria de Matrizes Aleatórias: Do Limite
Quântico Extremo ao Regime Semiclássico.**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em
Física Aplicada do Departamento de Física da Universi-
dade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre em Física.*

Orientador: *Prof. Dr. Ailton Fernandes de Macedo Junior*

Recife
23 de Agosto de 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Biblioteca Central, Recife-PE, Brasil

S586a Silva, Emerson José Freitas da.

Abordagem de movimento browniano para os ensembles circulares da teoria de matrizes aleatórias : do limite quântico extremo ao regime semi-clássico / Emerson José Freitas da Silva. – 2017.

67 f. : il.

Orientador: Ailton Fernandes de Macedo Júnior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Física, Recife, BR-PE, 2017.
Inclui referências e apêndices.

1. Teoria de matrizes aleatórias 2. Ensembles circulares 3. Ensembles de movimento browniano 4. Física mesoscópica; 5. Transporte quântico I. Macedo Júnior, Ailton Fernandes de, orient. II. Título

CDD 530

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Abordagem de Movimento Browniano para os Ensembles Circulares da Teoria de
Matrizes Aleatórias: Do regime Quântico Extremo ao limite Semiclássico

Emerson José Freitas da Silva

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 23 de Agosto de 2017 pela Comissão Examinadora.

Orientador: Ailton Fernandes de Macêdo Júnior

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Ailton Fernandes de Macêdo Júnior
UFRPE

Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa
UFRPE

Prof. Dr. Ramon Enrique Ramayo Gonzalez
UFRPE

*Dedico este trabalho à minha família, em especial ao meu
filho Gabriel, à minha esposa Danielle, ao meu pai
Aldemir e às minhas mães (in memoriam) Lourdes Gabriel
Freitas, Lindalva José da Silva e Lindinalva José da Silva.*

"Nunca deixe que lhe digam que não vale a pena acreditar no sonho que se tem, ou que seus planos nunca vão dar certo, ou que você nunca vai ser alguém."

—RENATO RUSSO

Sumário

1	Introdução	4
1.1	Ponto de Contato Quântico	5
1.2	A matriz de Espalhamento	6
1.2.1	O Formalismo de Landauer-Büttiker e os Observáveis de Transporte	9
1.3	Estatística de Contagem de Carga	11
1.4	Teoria de Matrizes Aleatórias e os Ensembles Circulares	12
2	Ensembles de Movimento Browniano	16
2.1	Processos Estocásticos	16
2.2	Equação de Chapman-Kolmogorov	18
2.3	Equação Diferencial de Chapman-Kolmogorov	19
2.3.1	Dedução da equação	20
2.4	Processos Estocásticos e Ensembles de Movimento Browniano	22
3	Método da Equação de Movimento	25
3.1	Método da Equação de Movimento	25
3.1.1	Considerando a Função $F = X_m$	27
3.1.2	Considerando a Função $F = X_n X_m$	28
3.1.3	Caso geral $F = X_\lambda = X_{\lambda_1} X_{\lambda_2} \dots X_{\lambda_n}$	29
3.1.4	Cálculo das médias	31
3.2	Aplicação do método para pontos quânticos	31
3.2.1	Classes Wigner-Dyson e BdG	33
3.2.2	Classes Quirais	34
4	Análise Semiclássica para os Ensembles Circulares da TMA	38
4.1	Equação de movimento para a densidade de níveis	38
4.2	Equação integral para a densidade de níveis	40
4.3	Classe BdG/Wigner-Dyson	42
4.3.1	Termo dominante	43
4.3.2	Correção	44
4.3.3	Média de uma estatística linear	45
4.4	Expansões Semiclássicas em variáveis angulares	45
4.4.1	Série de Cossenos de Fourier	46
4.4.2	Média de uma estatística linear	48
4.5	Médias de somas de potências e Cumulantes da Estatística de Contagem	49
4.5.1	Média da soma de potências no limite semiclássico	50

4.5.2	Expansão semiclássica para os $\langle q_k \rangle$	51
4.5.3	Resultados para a classes WD/BdG	53
5	Conclusões e Perspectivas	54
A	Número de Stirling	55
A.1	Número de Stirling de primeira espécie	55
A.2	Número de Stirling de segunda espécie	56

Lista de Figuras

1.1	Ilustração da Junção das amostras de AlGaAs e GaAs que dão origem ao 2DEG. Em (b) tem-se o perfil das bandas de condução e valência entre a junção antes da transferência de carga e em (c) após a transferência. Figuras adaptadas de [6].	4
1.2	Ponto Quântico Circular(ou Biliar mesoscópico circular). Os elétrons se movem na região escura da Figura. Figura retirada da referência[7].	5
1.3	Representação esquemática de um ponto quântico balístico ligado a dois guias de ondas: Note que um elétron é espalhado várias vezes nas fronteiras do ponto antes de sair. Figura retirada de [8].	5
1.4	Quantização da Condutância para um condutor balístico. Figura adaptada de [9]	6
1.5	Cavidade caótica conectada a guias ideais. As setas indicadas por a_n representam ondas entrando na cavidade e as setas indicadas por b_n representam ondas saindo. Figura retirada de [12].	7
1.6	Sistema com dois terminais.	9
2.1	Realização da variável estocástica $\xi(t)$.	17
2.2	Espaço amostral particionado em seis eventos mutuamente excludentes. Neste caso $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4) \cup (A \cap B_5) \cup (A \cap B_6)$.	18
3.1	Variância da potência do ruído de disparo no caso de contatos simétricos $N_1 = N_2 = N$.	36
3.2	Variância da potência do ruído de disparo em função de N_2 para $N_1 = 7$.	36

Lista de Tabelas

1.1	Ensembles circulares da TMA. Os símbolos N e S representam Não e Sim respectivamente para a presença ou ausência das simetrias de Reversão Temporal(RT), Rotação de Spin(RS), Subrede(SR) e Partícula Buraco(PB).	15
3.1	Médias calculadas para as partições λ dos com peso de 1 a 8.	32
3.2	Coeficientes para os Ensembles Circulares.	33
4.1	Coeficientes para os Ensembles Circulares.	42

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho e gostaria de agradecer em especial:

- Ao meu filho *Gabriel* e à minha esposa *Danielle* pela confiança e paciência de sempre;
- Aos amigos de turma: *Ângela, Cibele, Edson, Enrique, Felipe, Harrison, Ilberto, Israel e João*, amigos estes que dividiram parte de seu tempo em aulas, resolução de provas e listas (envolvendo potenciais de quarta e sexta ordens);
- Aos meus amigos do DF/UFPE *Wellington Moreira, Aldo Júnior, Thais Feliciano* e tantos outros que sempre me ajudaram e motivaram para continuarmos em busca de Ciência;
- Aos professores do DF-UFRPE com os quais tive a oportunidade de cursar algumas disciplinas e aprender mais sobre Física.
- A todos os funcionários do DF-UFRPE;
- Ao meu orientador Prof. Dr. *Ailton Macedo*, pela orientação e dedicação para a conclusão deste trabalho;
- À CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos uma classe de ensembles de movimento browniano da teoria de matrizes aleatórias (TMA). Tais ensembles são caracterizados por uma equação de Fokker-Planck que possui solução de equilíbrio consistente com a distribuição conjunta dos ensembles polinômios ortogonais da TMA. Em particular, estudamos os ensembles de Jacobi que descrevem a distribuição de autovalores da transmissão em cavidades caóticas balísticas com contatos ideais. Nesses sistemas obtivemos valores médios de diversos observáveis de transporte como a condutância, potência do ruído de disparo ou cumulantes de ordem superior da estatística de contagem de carga. Tais resultados são divididos em duas categorias. A primeira é baseada numa generalização do método da equação de movimento para o cálculo de médias do tipo $\langle X_{\lambda_1} X_{\lambda_2} \dots X_{\lambda_N} \rangle$ onde $X_n = \sum_i x_i^n$, $n = 1, 2, \dots$, é uma soma de potências dos autovalores de transmissão. Tais médias são reduzidas a uma hierarquia de sistemas lineares cuja ordem depende do número de partições do inteiro $\sum_i \lambda_i$. Tais equações foram implementadas num software de computação algébrica e permitiram soluções exatas para número de canais, N_1 e N_2 , e índice de simetria de Dyson, β , arbitrários. No entanto, à medida que os sistemas crescem, o tempo computacional envolvido e o tamanho das soluções torna-se inconveniente. Neste contexto, nos concentramos em aproximações assintóticas para o regime semiclássico $N_1, N_2 \gg 1$. Para isso desenvolvemos um método geral que permite o cálculo da média e da correção de localização fraca para todos os cumulantes da estatística de contagem de carga.

Abstract

In this dissertation we studied a class of Brownian motion ensembles of random matrix theory (RMT). Such ensembles are characterized by a Fokker-Planck equation that has an equilibrium solution consistent with the joint distribution of the orthogonal polynomial ensembles of RMT. In particular, we studied Jacobi ensembles which describe the joint transmission eigenvalues distribution for chaotic ballistic cavities with ideal contacts. In these systems we obtained average values for diverse transport observables such as conductance, shot-noise power or higher order cumulants of the counting charge statistics. The results are divided in two categories. The first ones are based on a generalization of equation of motion method to obtain averages like $\langle X_{\lambda_1} X_{\lambda_2} \dots X_{\lambda_N} \rangle$ where $X_n = \sum_i x_i^n$, $n = 1, 2, \dots$, is a power sum of the transmission eigenvalues. Such averages are reduced to a hierarchy of linear systems whose order depends on the number of partitions of the integer $\sum_i \lambda_i$. The equations were implemented in a symbolic computation software and allowed exact solutions for arbitrary channel numbers, N_1 e N_2 , and Dyson symmetry index, β . However, as the system's order increases, the computation time and the size of the solutions become inconvenient. In this context, we studied asymptotic approximations for the desired averages in the semiclassical regime $N_1, N_2 \gg 1$. For this, we developed a general method which yields the average and weak localization correction for all cumulants of the counting charge statistics.

CAPÍTULO 1

Introdução

Na área de Transporte Eletrônico houve grande desenvolvimento de dispositivos eletrônicos na escala de nanômetros, como por exemplo o **ponto de contato quântico**. Vários outros sistemas foram desenvolvidos nesta escala de comprimento, sendo notória a característica fundamental de preservação da coerência de fase durante todo o processo de transporte de carga [1], ou seja, os portadores mantêm a capacidade de formar padrões de interferência no interior da amostra. Em busca de respostas mais profundas, muitas teorias de transporte de carga em nanoestruturas foram desenvolvidas [2, 3, 4, 5]. Tais estruturas nanométricas são conhecidas como *sistemas mesoscópicos* e são fabricados em geral, a partir da heteroestrutura de Arseneto de Gálio (GaAs) e Arseneto de Gálio dopado com Alumínio (AlGaAs), como pode ser visto na figura (1.1).

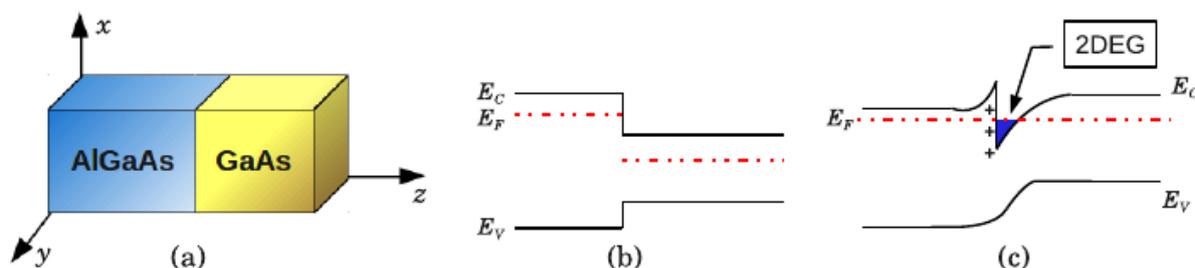


Figura 1.1 Ilustração da Junção das amostras de AlGaAs e GaAs que dão origem ao 2DEG. Em (b) tem-se o perfil das bandas de condução e valência entre a junção antes da transferência de carga e em (c) após a transferência. Figuras adaptadas de [6].

O desenvolvimento da tecnologia de gás bidimensional de elétrons (2DEG) de alta mobilidade possibilitou a produção de dispositivos onde o movimento dos elétrons fosse inteiramente balístico. Neste regime não há espalhamento elástico devido a impurezas, ou seja, a função de onda pode se propagar por “longas” distâncias praticamente sem sofrer espalhamento por impurezas. O que define a aleatoriedade da fase e consequentemente a desordem do sistema são as condições de contorno das amostras mesoscópicas. Dois exemplos importantes são o *ponto de contato quântico* e o *ponto quântico balístico* ¹.

¹O segundo é também conhecido como *cavidade caótica*.

1.1 Ponto de Contato Quântico

O Ponto Quântico(PQ) é uma cavidade condutora delimitada por regiões isolantes; suas dimensões espaciais são tais que permitem o transporte coerente de elétrons pelo interior do PQ. A construção do PQ é realizada através de um gás bidimensional de elétrons(2DEG) como na figura (1.1), onde temos um confinamento nas três direções espaciais, que resulta num espectro discreto nos níveis de energia assim como num átomo ou molécula².

Propriedades de transporte de um PQ podem ser medidas através de um acoplamento do sistema a reservatórios de elétrons, forçando-os a saírem do equilíbrio por meio de uma diferença de potencial. Podemos visualizar um PQ de geometria circular na figura (1.2)

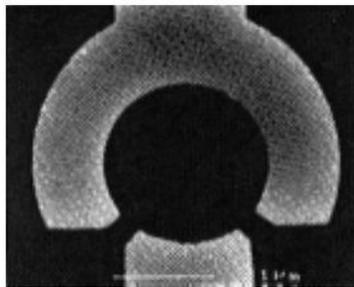


Figura 1.2 Ponto Quântico Circular(ou Bilhar mesoscópico circular). Os elétrons se movem na região escura da Figura. Figura retirada da referência[7].

O objeto de estudo desta dissertação é o ponto quântico balístico conectado ao meio externo por dois guias ideais (ver figura 1.3). O transporte em pontos quânticos balísticos são dominados pelo espalhamento eletrônico não de impurezas, mas pelos limites da estrutura.

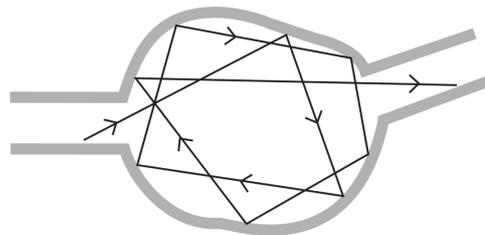


Figura 1.3 Representação esquemática de um ponto quântico balístico ligado a dois guias de ondas: Note que um elétron é espalhado várias vezes nas fronteiras do ponto antes de sair. Figura retirada de [8].

Os sistemas mesoscópicos tem escalas de comprimento maiores que as escalas microscópicas(átomos ou moléculas), entretanto não podem ser considerados como sistemas macroscópicos, pois exibem coerência de fase para os portadores de carga no decorrer de toda a dinâmica em seu interior. Tal característica marcante guiou o desenvolvimento de uma descrição estatística para a física da matéria condensada em escala mesoscópica e levou à previsões de diversos fenômenos físicos novos como:

²O ponto quântico é também pensado como um átomo artificial.

1. Quantização da condutância

Foi uma importante descoberta da física mesoscópica[6]. Os autores[9, 10] mediram a condutância de um gás de elétrons bidimensional em uma heteroestrutura de GaAs. Suas conclusões foram que à medida que variavam a largura da constricção (W), se formava degraus que são múltiplos inteiros de um valor fixo $G_0 = 2e^2/h$, como pode ser visto na figura (1.4)

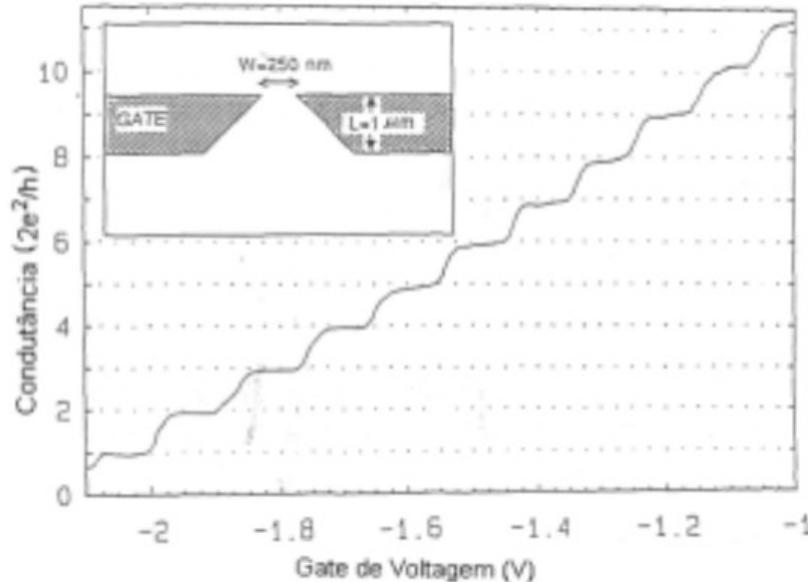


Figura 1.4 Quantização da Condutância para um condutor balístico. Figura adaptada de [9]

2. Localização Fraca

É um efeito que aparece na ausência de um campo magnético externo, ou seja, com a simetria de reversão temporal sendo preservada[2, 11]. É observado uma diminuição da condutância e para sistemas com interação spin-órbita, a condutância aumenta³. Se um campo magnético é aplicado ao sistema, os efeitos são anulados de tal forma que a condutância toma seu valor clássico dado pela lei de *Ohm*. Este fenômeno depende apenas da simetria de reversão temporal, não tendo dependência de detalhes microscópicos da amostra, como a distribuição de impurezas por exemplo.

1.2 A matriz de Espalhamento

Estamos interessados em discutir o espalhamento de um elétron⁴ com energia de Fermi $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ atravessando a cavidade caótica da figura (1.5) seguindo a referência [12]

³Este efeito é conhecido como *anti-localização fraca*.

⁴Iremos desprezar o grau de liberdade de spin.

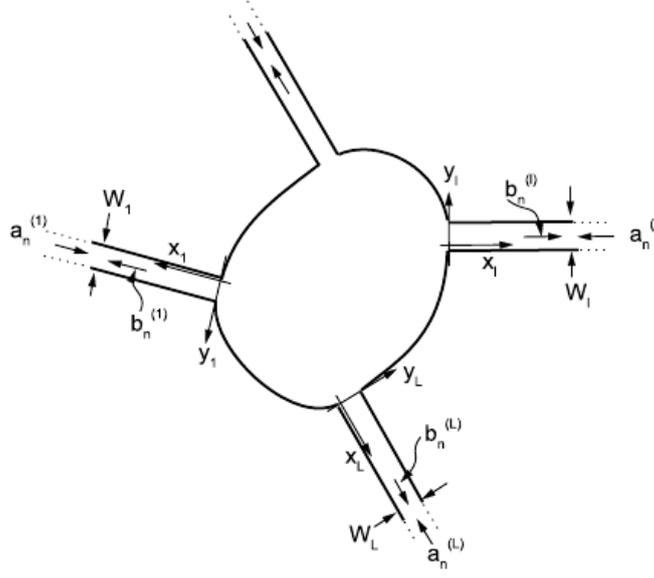


Figura 1.5 Cavidade caótica conectada a guias ideais. As setas indicadas por a_n representam ondas entrando na cavidade e as setas indicadas por b_n representam ondas saindo. Figura retirada de [12].

Particularmente vamos estudar uma cavidade que possui 2 guias, onde o guia 1 contém N_1 canais abertos e o guia 2 contém N_2 canais abertos. As funções de onda assintóticas⁵ em cada guia são dadas por uma combinação de ondas planas entrando e saindo da cavidade

$$\phi_n(\vec{r}_\ell) \propto e^{\pm ik_n^{(\ell)} x_\ell} \chi_n(y_\ell) \quad (1.1)$$

onde o sinal positivo (negativo) é para ondas saindo (entrando) da (na) cavidade e o índice ℓ denota o guia ao qual a função de onda pertence.

A solução transversal na ausência de campo magnético externo é da forma

$$\chi_n(y_\ell) = \sqrt{\frac{2}{W_\ell}} \text{sen}(K_n^{(\ell)} y_\ell) \quad \therefore \quad K_n^{(\ell)} = \frac{n\pi}{W_\ell}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

sendo $K_n^{(\ell)}$ o número de onda transversal.

As funções $\chi_n(y_\ell)$ vão a zero nas paredes dos guias e formam um conjunto ortonormal completo de funções para variável y_ℓ ; isto é

$$\langle \chi_n | \chi_m \rangle = \delta_{nm}. \quad (1.3)$$

Os números de onda longitudinal e transversal satisfazem a relação

$$\left[K_n^{(\ell)} \right]^2 + \left[k_n^{(\ell)} \right]^2 = k_F^2. \quad (1.4)$$

⁵O termo assintótico está se referindo a posições no guia que estão distantes da cavidade e obviamente só os canais abertos contribuem para a função de onda.

Se $K_n^{(\ell)} < k_F$, então $[k_n^{(\ell)}]^2 > 0$, $k_n^{(\ell)}$ é real, e as exponenciais na equação (1.1) representam ondas propagantes nos guias: são os modos propagantes ou canais abertos. Por outro lado, quando $K_n^{(\ell)} > k_F$, então $[k_n^{(\ell)}]^2 < 0$, $k_n^{(\ell)}$ é imaginário, dando origem a ondas que decaem exponencialmente nos guias: estes são os modos evanescentes ou canais fechados. Se

$$N_\ell < k_F W_\ell / \pi < N_\ell + 1 \quad (1.5)$$

há N_ℓ canais abertos no guia ℓ . Longe da cavidade, ou seja, para $x_\ell \rightarrow \infty$, apenas os canais abertos contribuem para a função de onda. A função de onda “total” no guia ℓ é uma combinação linear de todas as funções de onda no mesmo guia, ou seja

$$\psi(\vec{r}_\ell) = \sum_{n=1}^{N_\ell} \left[a_n^{(\ell)} \frac{e^{-ik_n^{(\ell)} x_\ell}}{(\hbar k_n^{(\ell)} / m)^{1/2}} + b_n^{(\ell)} \frac{e^{ik_n^{(\ell)} x_\ell}}{(\hbar k_n^{(\ell)} / m)^{1/2}} \right] \sqrt{\frac{2}{W_\ell}} \text{sen}(K_n^{(\ell)} y_\ell). \quad (1.6)$$

e a normalização é tal que dá origem a um fluxo unitário [12].

Definimos o vetor N_ℓ -dimensional

$$\mathbf{a}^{(\ell)} = (a_1^{(\ell)}, \dots, a_{N_\ell}^{(\ell)})^T \quad (1.7)$$

que contém as N_ℓ amplitudes *entrantes* no guia ℓ ($\ell = 1, 2, \dots$). Definimos ainda outro vetor cujas componentes são formadas pelo vetor definido anteriormente, ou seja

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots)^T. \quad (1.8)$$

Cada componente do vetor (1.8) está relacionada com um dos guias conectados a cavidade⁶. Analogamente, definimos o vetor \mathbf{b} , relacionado com as ondas que saem dos guias.

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \dots)^T. \quad (1.9)$$

A matriz de espalhamento, ou matriz \mathbf{S} , é definida pela relação

$$\mathbf{b} = \mathbf{S} \mathbf{a} \quad (1.10)$$

conectando as amplitudes de entrada e saída. Em termos matriciais \mathcal{S} assume a forma

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} & \dots & t_{1L} \\ t_{21} & r_{22} & \dots & t_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{L1} & t_{L2} & \dots & r_{LL} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

ou em sua estrutura de blocos,

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} \\ t_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

⁶O índice de cada componente representa um dos guias conectados à cavidade.

sendo r e r' as matrizes de reflexão e t e t' as matrizes de transmissão.

Note também que a matriz quadrada S tem dimensão dada por

$$N_T = \sum_{l=1}^2 N_l \quad (1.13)$$

onde N_l é o número de canais abertos no guia l .

Alguns vínculos na matriz S são gerados pelas simetrias fundamentais do problema, como por exemplo a conservação da corrente que torna a matriz S unitária[13], ou seja, $S^\dagger S = 1$ ⁷, portanto, na ausência de qualquer outra simetria, este vínculo é o único existente. Quando há preservação da Simetria de Reversão Temporal(para partículas sem Spin), S é simétrica [13], ou seja, $S^T S = 1$. Temos ainda que as matrizes $t^\dagger t$ e $t'^\dagger t'$ compartilham dos mesmos autovalores $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}$, sendo $N = \min(N_1, N_2)$ para o caso de 2 terminais. Estes "autovalores de transmissão" estão compreendidos entre 0 e 1 numa cavidade caótica.

1.2.1 O Formalismo de Landauer-Büttiker e os Observáveis de Transporte

Este formalismo introduzido inicialmente por Landauer[14, 15] e estendido por Buttiker[16] descreve a conexão das propriedades de transporte do sistema de interesse com suas propriedades de espalhamento e tem sido bastante usado para interpretar resultados de experimentos em Física Mesoscópica. Considerando uma amostra mesoscópica conectada a dois reservatórios de elétrons, onde cada reservatório é mantido a potenciais químicos μ_1 e μ_2 respectivamente; e sendo estabelecida uma diferença de potencial V entre os mesmos. Estando o sistema em equilíbrio térmico à temperatura T como ilustra a figura (1.6)

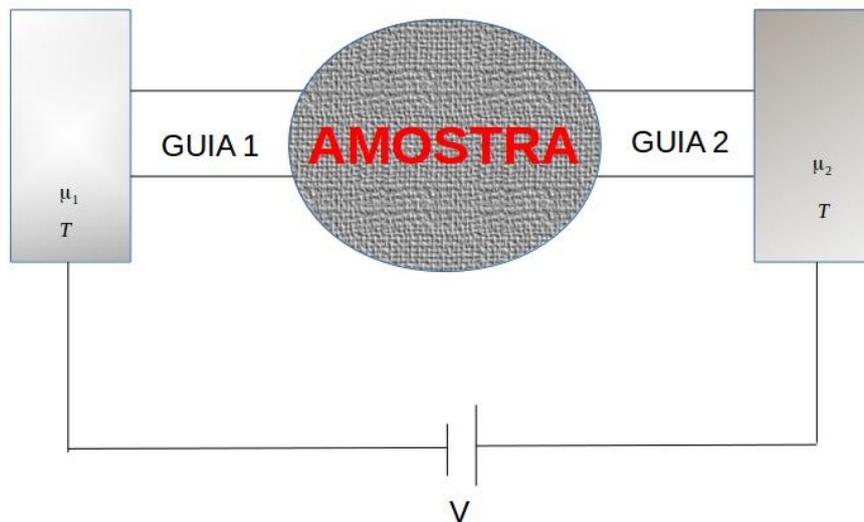


Figura 1.6 Sistema com dois terminais.

É possível mostrar que o valor esperado do operador corrente é dado por[17]

⁷Onde 1 significa a matriz identidade.

$$\langle I \rangle = \frac{e}{2\pi\hbar} \int dE \operatorname{Tr} [t^\dagger(E)t(E)] [f_1(E) - f_2(E)] \quad (1.14)$$

onde t é bloco de transmissão da matriz de espalhamento (1.12) e f_1 e f_2 são as funções de distribuição dos elétrons nos terminais 1 e 2 respectivamente.

1. Condutância:

A condutância do sistema, que é definida por

$$G \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle I \rangle}{V} \quad (1.15)$$

dado que a diferença de potencial V entre os reservatórios se relaciona com o potencial químico da forma $\mu_1 - \mu_2 = eV$.

Como para $T = 0$, apenas elétrons no nível de Fermi contribuem para a condutância, a equação (1.15) fica portanto,

$$G = \frac{e^2}{h} \operatorname{Tr} [t^\dagger(\epsilon_F)t(\epsilon_F)], \quad (1.16)$$

esta é a Fórmula de Landauer.

Perceba que a equação (1.16) relaciona a matriz de espalhamento calculada na energia de Fermi e a condutância do sistema, e diagonalizando a matriz $t^\dagger t$ pode-se escrever a condutância como

$$G = G_0 \sum_j \tau_j \quad (1.17)$$

onde $G_0 \equiv 2e^2/h$ é o quantum de condutância. Como existem duas orientações possíveis para o spin [18], devemos adicionar o fator 2.

2. Ruídos:

Pela teoria de espalhamento é possível obter mais propriedades de transporte como flutuações temporais da corrente. Para temperatura não nula e $V = 0$ temos o ruído térmico que é consequência das flutuações térmicas do número de ocupação nos reservatórios. O ruído é caracterizado pela densidade espectral ou potência do espectro $P(\omega)$, que é a transformada de Fourier de frequência ω da função de correlação corrente-corrente, ou seja

$$P(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \langle \Delta \mathcal{I}_I(t - t_0) \mathcal{I}_I(t_0) \rangle. \quad (1.18)$$

Alguns problemas são encontrados para frequências arbitrárias como a conservação da corrente e a invariância de gauge, sendo necessário considerações adicionais para se obter

um resultado fisicamente aceitável, porém a componente de frequência nula do ruído não apresenta tais problemas e nosso interesse maior está nela.

Para o sistema de dois terminais, é possível mostrar que ruído térmico é dado por [17]

$$P = 4k_B T G, \quad (1.19)$$

onde T é a temperatura e G é a condutância. Este é o resultado do teorema da flutuação-dissipação [19], que relaciona a condutância com flutuações da corrente de equilíbrio. Assim, a investigação de flutuações da corrente no equilíbrio fornece a mesma informação que a investigação da condutância. Perceba que o ruído térmico vai a zero no limite de temperatura nula.

Em um condutor a quantização da carga tem como consequência o ruído de disparo e para o problema de dois terminais ela é dada por [17]

$$P = \frac{e^3 |V|}{\pi \hbar} \text{Tr}(tt^\dagger rr^\dagger), \quad (1.20)$$

onde os elementos da matriz de espalhamento são calculados no nível de Fermi. Definindo $P_0 = e^3 |V| / \pi \hbar$, temos a potência do ruído de disparo adimensional

$$p \equiv P/P_0 = \text{Tr}(tt^\dagger rr^\dagger) = \sum_j \tau_j (1 - \tau_j), \quad (1.21)$$

onde usamos os autovalores de transmissão.

O ruído de disparo(ou de não equilíbrio) depende da condutância do sistema $g \equiv \sum_i \tau_i$ e do termo $\sum_i \tau_i^2$, ou seja, o ruído de disparo depende também das probabilidades de transmissão e reflexão dos autocanais.

Podemos concluir que o ruído térmico não fornece informação adicional que não esteja contida na condutância ($P_T \propto G$), entretanto a potência do ruído de disparo, relacionada com o segundo momento da corrente, contém mais informações sobre os canais de transmissão que a condutância média. A seguir estudaremos momentos (ou cumulantes) de ordem superior, que revelam ainda mais informações do processo de transporte.

1.3 Estatística de Contagem de Carga

Com a intenção de se aprofundar mais sobre os efeitos quânticos presentes nos sistemas foi introduzido na área de transporte o conceito de *Estatística de Contagem de Carga*(ECC)[3]. Esta estatística tem como intuito entender o processo de transmissão de carga, sendo descrita pela distribuição de probabilidade P_n de n cargas serem transmitidas pela amostra durante um tempo de observação T_{ob} . Um dos primeiros resultados sobre a ECC para sistemas mesoscópicos com número de canais > 1 foram obtidos por Levitov, Lee e Lesovik[20].

Eles obtiveram a função geratriz dos cumulantes da estatística de transferência de carga(CTC)⁸ $\Phi(\lambda)$ de um dispositivo mesoscópico descrito pelos seus autovalores de transmissão, τ_j ; e no regime de baixas temperaturas ($T \rightarrow 0$) tal função geratriz toma a forma

$$\Phi(\lambda) = M_0 \sum_{j=1}^N \ln[1 + \tau_j(e^{i\lambda} - 1)], \quad (1.22)$$

onde $M_0 = eVT_{ob}/h$ é interpretado como o número de tentativas de transmissão de elétrons por canal durante o tempo de observação T_{ob} .

Da fórmula de *Levitov-Lesovik* 1.22 obtem-se os cumulantes pela expressão[21]

$$q_n = \sum_{i=1}^N \left(\tau(1-\tau) \frac{d}{d\tau} \right)^{n-1} \tau \Big|_{\tau=\tau_i}. \quad (1.23)$$

Sendo os quatro primeiros cumulantes dados por

$$q_1 = \sum_{j=1}^N \tau_j \equiv g \quad (1.24)$$

$$q_2 = \sum_{j=1}^N \tau_j(1-\tau_j) \equiv p \quad (1.25)$$

$$q_3 = \sum_{j=1}^N \tau_j(1-\tau_j)(1-2\tau_j) \equiv \kappa \quad (1.26)$$

$$q_4 = \sum_{j=1}^N \tau_j(1-\tau_j)(1-6\tau_j+6\tau_j^2) \equiv \zeta. \quad (1.27)$$

Nosso sistema de interesse é a cavidade balística que possui uma dinâmica caótica onde os autovalores de transmissão são variáveis aleatórias correlacionadas; portanto, além das flutuações devido à quantização da carga descritas pela ECC, outras flutuações devido ao espalhamento caótico das cargas nas paredes da cavidade surgem. Na seção seguinte descreveremos as propriedades estatísticas dessas flutuações baseados na Teoria de Matrizes Aleatórias.

1.4 Teoria de Matrizes Aleatórias e os Ensembles Circulares

A Teoria de Matrizes Aleatórias (TMA) tem sido bem sucedida na descrição de propriedades estatísticas de sistemas que apresentam dinâmica caótica. Propriedades universais de sistemas físicos são descritas de maneira relativamente simples pela (TMA) quando descartamos características microscópicas irrelevantes destes sistemas.

O comportamento universal tem como base a validade de uma hipótese ergódica na qual médias numa janela relevante de energia são iguais a médias no ensemble convenientemente

⁸Do ponto de vista prático é mais conveniente considerar os CTC do que os cumulantes da ECC.

definido. Em contraste com a prescrição da mecânica estatística usual, na qual se gera um ensemble de sistemas idênticos governados pelo mesmo hamiltoniano, os ensembles da TMA são governados por diferentes hamiltonianos que comungam das mesmas propriedades de simetria. Desta forma, a abordagem depende fortemente de propriedades fundamentais de simetria como simetria de reversão temporal *SRT* e simetria de rotação de spin *SRS*. A presença ou ausência destas simetrias gera as três classes introduzidas por Dyson na década de 60 e são caracterizadas pelo índice β : Ortogonal (com *SRT*, com *SRS*, $\beta = 1$), Unitária (sem *SRT*, com ou sem *SRS* e $\beta = 2$) e Simplética (com *SRT*, sem *SRS*, $\beta = 4$).

Em problemas de transporte eletrônico através de condutores coerentes pode-se conectar propriedades de transporte como condutância, potência do ruído de disparo ou cumulantes de ordem superior da Estatística de Contagem de Carga(ECC) à matriz de espalhamento (matriz S).

Na teoria de Landauer a condutância adimensional pode ser escrita como

$$g = \text{Tr}(tt^\dagger) = \text{Tr}(\Lambda_1 S \Lambda_2 S^\dagger), \quad (1.28)$$

onde usamos os projetores

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{N_2} \end{pmatrix},$$

ou escrita dieratmente em termos de autovalores de transmissão τ_i (autovalores da matriz hermiteana tt^\dagger)

$$g = \sum_i \tau_i. \quad (1.29)$$

Flutuações na condutância devido à dinâmica caótica podem ser obtidas a partir da formulação da TMA para a matriz S . Para contatos ideais o ensemble de matrizes S pode ser obtido a partir do princípio de máxima entropia[22] e segue uma distribuição uniforme no grupo de matrizes unitárias. Dessa forma, médias no ensemble de observáveis de transporte podem ser obtidas por integrações no grupo unitário. No caso da condutância (1.28) podemos escrever

$$\langle g \rangle = \int d\mu(S) \text{Tr}(\Lambda_1 S \Lambda_2 S^\dagger), \quad (1.30)$$

onde $d\mu(S)$ é a medida de Haar do grupo unitário.

Finalmente, a presença ou ausência de *SRT* e *SRS* gera os três ensembles circulares da TMA: ensemble circular ortogonal ($\beta = 1$), ensemble circular unitário ($\beta = 2$) e ensemble circular simplético ($\beta = 4$). Integrais do tipo (1.30) podem ser realizadas pelo método diagramático[23] nas três classes de simetria. Uma alternativa a este procedimento explora a parametrização da matriz S conhecida como decomposição polar[12] que envolve explicitamente os autovalores de transmissão.

$$S = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\tau} & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau} & \sqrt{1-\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 & 0 \\ 0 & v_4 \end{pmatrix}$$

Neste caso, o cálculo da medida de Haar[22] fornece a seguinte distribuição dos autovalores de transmissão

$$P(\{\tau\}) = C_N \prod_{i < j} |\tau_i - \tau_j|^\beta \prod_i \tau_i^{\beta(|N_1 - N_2| + 1)/2 - 1}, \quad (1.31)$$

onde a constante de normalização C_N é obtida a partir da integral de Selberg [22]. A média de uma função arbitrária dos autovalores de transmissão é definida por

$$\langle f \rangle = \int_{[0,1]^N} f(\{\tau\}) P(\{\tau\}) d^N \tau, \quad (1.32)$$

dessa forma, o conhecimento da distribuição (1.31) permite, em princípio, a obtenção de valores esperados de qualquer observável de transporte. No entanto, o cálculo de integrais desse tipo é uma tarefa não trivial, e tipicamente os resultados exatos estiveram limitados por muito tempo aos casos $N_1, N_2 \gg 1$ (limite semiclássico) e $N_1 = N_2 = 1$ (limite quântico extremo).

Tal limitação começou a mudar com a introdução de novos métodos analíticos que tratam as classes de simetria de forma unificada e o índice de simetria de Dyson (β) passou a ser tratado como um parâmetro. Dentre tais métodos, destacamos os ensembles de movimento browniano da teoria de matrizes aleatórias [24] e técnicas baseadas em propriedades de integrais de Selberg e na teoria de funções simétricas [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32].

Além dos três ensembles circulares clássicos citados anteriormente, existem outras seis classes da TMA quando consideramos simetrias de subrede (quiral) e partícula-buraco. O total de dez classes, foi estabelecido através da conexão entre a TMA e teoria de espaços simétricos de Cartan [33]. Elas podem ser subdivididas em três categorias: Wigner-Dyson, quiral e Bogoliubov-de Gennes (BdG). A classe Wigner-Dyson contém os três ensembles clássicos da TMA [22] e foram estudadas nas referências [34, 32]. As classes quirais aplicam-se a sistemas com desordem fora da diagonal, como em modelos de *hopping* aleatório [13, 35]. Finalmente, a classe BdG é usada na descrição de quase-partículas em supercondutores não convencionais fracamente desordenados [36]. Em todos os casos, a distribuição de autovalores é um caso particular da distribuição de Jacobi da teoria de matrizes aleatórias

$$P(\{x\}) = C_N \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_i x_i^\mu (1 - x_i)^\nu, \quad (1.33)$$

onde os expoentes μ e ν são dados pela tabela(1.1).

A tabela também mostra a classificação de Cartan para cada classe, o nome de cada ensemble e o índice de Dyson de acordo com a presença ou ausência das simetrias de reversão temporal (RT), rotação de spin (RS), sub-rede (SR) e partícula-buraco (PB). Além disso, $N = \min(N_1, N_2)$ e $m = |N_1 - N_2|$.

Nesta dissertação vamos revisitar uma técnica não perturbativa baseada na equação de movimento de valores médios nos ensembles de movimento browniano para o cálculo de observáveis de transporte nas 10 classes de simetria descritas acima. Ensembles de movimento browniano são ensembles de não equilíbrio da TMA nos quais os autovalores de transmissão executam um movimento browniano. Este processo de difusão é descrito por uma equação de Fokker-Planck com solução de equilíbrio dada pela Eq. (1.33) de modo que os coeficientes de deriva e difusão que podem ser obtidos a partir dos coeficientes β , μ e ν da tabela (1.1).

Temos dois objetivos principais:

1. Usar a técnica da equação de movimento para o cálculo de médias no equilíbrio de somas de potências de autovalores de transmissão no peso de Jacobi (1.33). Isto possibilitará o cálculo de momentos da condutância e potência do ruído de disparo nas dez classes.

Classe	Ensemble	RT	RS	SR	PB	β	μ	ν
A	CUE	N	S or N	N	N	2	m	0
AI	COE	S	S	N	N	1	$(m-1)/2$	0
AII	CSE	S	N	N	N	4	$2m+1$	0
AIII	chCSE	N	S or N	S	N	2	0	m
BDII	chCOE	S	S	S	N	1	0	$(m-1)/2$
CII	chCSE	S	N	S	N	4	0	$2m+1$
D	CRE	N	N	N	S	1	$(m-1)/2$	$-1/2$
DIII	T-CRE	S	N	N	S	2	m	$-1/2$
C	CQE	N	S	N	S	4	$2m+1$	1
CI	T-CQE	S	S	N	S	2	m	$1/2$

Tabela 1.1 Ensembles circulares da TMA. Os símbolos N e S representam Não e Sim respectivamente para a presença ou ausência das simetrias de Reversão Temporal(RT), Rotação de Spin(RS), Subrede(SR) e Partícula Buraco(PB).

2. Generalizar a Análise Semiclássica desenvolvida na referência [24] para o caso $N_1 \neq N_2$.

No próximo capítulo nos basearemos na descrição realizada por [24] e veremos como se dá a conexão entre a teoria geral de Processos Estocásticos e os Ensembles de Movimento Browniano, evidenciando inicialmente elementos importantes da teoria de Processos Estocásticos que serão úteis para o decorrer da dissertação.

Ensembles de Movimento Browniano

Ensembles de Movimento Browniano (EMB) são generalizações naturais dos Ensembles estacionários da TMA originalmente introduzidas por Dyson em 1962 [37, 38, 39]. Estes ensembles de não equilíbrio possuem níveis ¹ que evoluem no tempo segundo um processo Markoviano. Especificamente, consideraremos sistemas com N níveis x_1, x_2, \dots, x_N executando um movimento browniano com distribuição conjunta $P(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$ evoluindo no tempo segundo uma equação de Fokker-Planck. Embora o tempo desta dinâmica não precise ter significado físico, ele pode ser interpretado como comprimento em problemas de fios quânticos [2, 40] ou campo magnético em problemas de *crossover* [41].

A referência [42] introduz os EMB a partir da teoria geral de processos estocásticos markovianos. Com algumas imposições matemáticas, pode-se chegar em equações de Fokker-Planck que descrevem tanto ensembles de polinômios ortogonais quanto ensembles de matrizes de transferência. Esta construção não depende de um modelo matricial subjacente e serve como classificação alternativa à tabela de espaços simétricos de Cartan, uma vez que cada problema das classes Wigner-Dyson, Quiral ou BdG pode ser descrito por uma equação de Fokker Planck.

Neste capítulo revisaremos a construção referência [42]. Para isso, faremos inicialmente uma revisão de ingredientes fundamentais da teoria de processos estocásticos baseado na referência [43].

2.1 Processos Estocásticos

Um Processo Estocástico (PE) corresponde a um sistema que evolui probabilisticamente no tempo, ou seja, um sistema descrito por uma variável aleatória dependente do tempo $\xi = \xi(t)$. Por exemplo, ξ poderia ser a velocidade de uma partícula browniana, o número de partículas numa caixa ou o número de pessoas numa fila. Vamos assumir a existência de um ensemble de sistemas no qual cada elemento corresponde a um número ξ que depende do tempo. Os diferentes valores assumidos por esta variável aleatória em função do tempo corresponde a uma realização de $\xi(t)$, como ilustra a figura (2.1).

Para um tempo fixo $t = t_1$, podemos definir a densidade de probabilidade a partir da média no ensemble

$$P(x_1, t_1) = \langle \delta(x_1 - \xi(t_1)) \rangle, \quad (2.1)$$

de modo que a probabilidade da variável aleatória $\xi(t_1)$ ser encontrada no intervalo $x_1 \leq \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1$ é dada por $P(x_1, t_1)dx_1$. Analogamente, se a variável $\xi(t)$ assume os valo-

¹Usamos termo “níveis” para indicar os graus de liberdade relevantes do problema. Os níveis podem ser energias num sistema fechado, autofases ou autovalores de transmissão num sistema aberto e assim por diante.

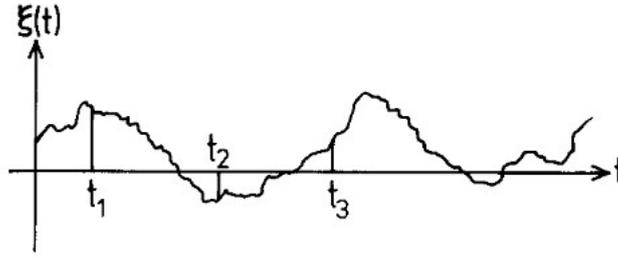


Figura 2.1 Realização da variável estocástica $\xi(t)$.

res $x_1, x_2, x_3 \dots$, nos tempos $t_1, t_2, t_3 \dots$, a densidade de probabilidade conjunta

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = \langle \delta(x_1 - \xi(t_1)) \delta(x_2 - \xi(t_2)) \delta(x_3 - \xi(t_3)) \dots \rangle \quad (2.2)$$

O tipo mais simples de processo estocástico é aquele para o qual a distribuição conjunta de probabilidade fatora, ou seja,

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = \prod_i P(x_i, t_i). \quad (2.3)$$

Isto significa que o valor assumido por ξ no instante t é completamente independente dos valores assumidos no passado (ou futuro)². Em processos estocásticos mais complexos, efeitos de memória podem ser introduzidos a partir da densidade de probabilidade condicional, definida por

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots) = \frac{P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots)}{P(y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots)}, \quad (2.4)$$

onde consideramos o ordenamento temporal $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots$. Neste sentido, a probabilidade condicional refere-se a predição de valores futuros de $\xi(t)$, ou seja, x_1, x_2, \dots em tempos t_1, t_2, \dots dado o conhecimento de valores assumidos no passado, ou seja, y_1, y_2, \dots nos tempos τ_1, τ_2, \dots .

Se a variável aleatória tem memória apenas de seu passado imediato, podemos escrever

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots) = P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1). \quad (2.5)$$

Um processo para o qual (2.5) é satisfeita é denominado Markoviano (Processo com memória de curto alcance). Um processo Markoviano é completamente determinado pelas densidades de probabilidades condicionais mais simples, $P(x, t | y, \tau)$, denominadas probabilidades de transição. De fato, usando a definição de densidade conjunta de probabilidade (2.4) e a hipótese markoviana (2.5), pode-se mostrar que

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots, x_n, t_n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(x_i, t_i | x_{i+1}, t_{i+1}) P(x_n, t_n), \quad (2.6)$$

²Um caso ainda mais simples ocorre quando $p(x_i, t_i)$ independe de t_i , ou seja, quando a mesma lei de probabilidade governa o processo para todos os tempos, como no caso dos ensaios de Bernoulli [44, 45] em que um mesmo processo probabilístico é repedido sucessivamente.

com os tempos satisfazendo o ordenamento $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_{n-1} \geq t_n$. Para um processo completamente sem memória, temos que $P(x, t | y, \tau) = P(x, t)$ e (2.6) se reduz a (2.3).

A generalização para processos estocásticos n -dimensionais é imediata. Considere n variáveis aleatórias dependentes do tempo $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$. A densidade de probabilidade dessas variáveis assumirem os valores $\mathbf{x}_i = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ no tempo t_i é dada por

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2; \dots) &= P(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, t_1; x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, t_2; \dots) \\ &= \langle \delta(x_1^{(1)} - \xi_1(t_1)) \dots \delta(x_n^{(1)} - \xi_n(t_1)) \delta(x_1^{(2)} - \xi_1(t_2)) \dots \delta(x_n^{(2)} - \xi_n(t_2)) \dots \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nas próximas seções consideraremos processos n -dimensionais.

2.2 Equação de Chapman-Kolmogorov

Seja Ω o espaço amostral de algum experimento probabilístico decomposto em conjuntos B_i que representam eventos mutuamente excludentes, ou seja, $\Omega = \cup B_i$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Um evento qualquer A de Ω pode ser decomposto como $A = \cup_i (A \cap B_i)$. A figura (2.2) ilustra essa decomposição do caso de uma partição de Ω em seis eventos mutuamente excludentes.

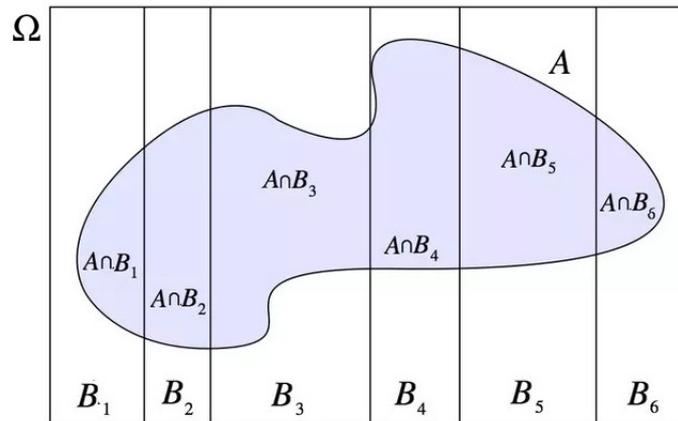


Figura 2.2 Espaço amostral particionado em seis eventos mutuamente excludentes. Neste caso $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4) \cup (A \cap B_5) \cup (A \cap B_6)$.

Portanto a probabilidade de ocorrência de A é dada por

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i). \quad (2.8)$$

O análogo de (2.8) no caso dos processos estocásticos contínuos introduzidos na seção anterior é

$$P(\mathbf{x}_1, t_1) = \int d\mathbf{x}_2 P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) \quad (2.9)$$

Desta forma, podemos reduzir o número de variáveis de uma densidade conjunta de probabilidade integrando sobre umas delas ³. Analogamente, podemos escrever⁴

$$P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_2, t_2) = \int d\mathbf{y} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{y}, \tau; \mathbf{x}_2, t_2). \quad (2.10)$$

Em particular, para um processo Markoviano, a decomposição (2.6) nos permite escrever

$$P(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{x}_2, t_2) = \int d\mathbf{y} P(\mathbf{x}_1, t_1 | \mathbf{y}, \tau) P(\mathbf{y}, \tau | \mathbf{x}_2, t_2), \quad (2.11)$$

que é conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov. Apesar de ser uma propriedade fundamental das probabilidades de transição de um processo markoviano, a equação de Chapman-Kolmogorov em sua forma integral não é de fácil solução. Por outro lado, propriedades dessas soluções podem ser obtidas mais facilmente a partir da equação de Chapman-Kolmogorov em sua forma diferencial. Na próxima secção discutiremos esta possibilidade.

2.3 Equação Diferencial de Chapman-Kolmogorov

Sob condições apropriadas a equação de Chapman-Kolmogorov pode ser reduzida a uma equação diferencial. Tais condições sustentam-se sob as propriedades de continuidade de um processo markoviano. Embora seja um conceito sutil, a continuidade de um processo markoviano pode ser precisamente definida. Considere um processo estocástico que inicia em (\mathbf{z}, t) e passa por $(\mathbf{x}, t + \Delta t)$. Para $\varepsilon > 0$ a probabilidade da distância entre esses dois pontos na trajetória amostral ser maior que ε é

$$\int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>\varepsilon} d\mathbf{x} P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t). \quad (2.12)$$

Dizemos que um processo markoviano possui trajetórias amostrais contínuas quando

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|>\varepsilon} d\mathbf{x} P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t) = 0 \quad (2.13)$$

com probabilidade 1 uniformemente em \mathbf{z} , t e Δt . Isto significa que a probabilidade para a posição final \mathbf{x} ser finitamente diferente de \mathbf{z} vai para zero mais rápido que Δt , quando Δt vai para zero.

Diante do exposto acima, e considerando à forma da condição de continuidade (2.13),

³O resultado deste procedimento é denominado densidade de probabilidade marginal [45].

⁴Considerando o ordenamento $t_1 \geq \tau \geq t_2$.

separa-se a parte contínua e a descontínua e exige-se as seguintes condições para todo $\varepsilon > 0$:

$$1. \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t)}{\Delta t} = W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t), \quad (2.14)$$

uniformemente em \mathbf{x}, \mathbf{z} e t para $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \geq \varepsilon$.

$$2. \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \varepsilon} dx(x_i - z_i) P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t) = D_i^{(1)}(\mathbf{z}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (2.15)$$

$$3. \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \varepsilon} dx(x_i - z_i)(x_j - z_j) P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t) = 2D_{ij}^{(2)}(\mathbf{z}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (2.16)$$

sendo os dois últimos uniformes em \mathbf{z}, ε e t .

A condição 1 é consistente com a condição de continuidade se $W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) = 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$. Caso contrário, esta quantidade descreve processos descontínuos. As condições 2 e 3, por sua vez, estão conectadas a movimentos contínuos e introduzem os coeficientes de deriva $D_i^{(1)}$ e difusão $D_{ij}^{(2)}$. Tais coeficientes medem a taxa de variação da média e covariância da quantidades $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ calculadas para todas as trajetórias dentro de uma distância ε de \mathbf{z} . Coeficientes de ordem superior, $D^{(n)}$ com $n \geq 3$, se anulam quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ [43].

2.3.1 Dedução da equação

Considere um processo markoviano com probabilidade de transição $P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, \tau)$ e $f(\mathbf{x})$ uma função arbitrária de classe C^2 . A taxa de variação do valor esperado de $f(\mathbf{x})$ é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \left[P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{y}, t') - P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') \right]. \quad (2.17)$$

Ao utilizar a equação de Chapman-Kolmogorov (2.11) no primeiro termo dos colchetes, temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') = \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int d\mathbf{x} \int d\mathbf{z} f(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') - \int d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t) \right]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

O espaço amostral Ω pode ser dividido em duas regiões $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \varepsilon$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \geq \varepsilon$ de modo que

$$\iint d\mathbf{x} d\mathbf{z} = \iint_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z} + \iint_{|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \geq \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z}. \quad (2.19)$$

Na primeira região, a função $f(\mathbf{x})$ pode ser expandida em série de Taylor em torno de $\mathbf{x} = \mathbf{z}$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{z}) + \sum_i \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} (x_i - z_i) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial z_i \partial z_j} (x_i - z_i)(x_j - z_j) + |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2 R(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (2.20)$$

onde, $|R(\mathbf{x}, \mathbf{z})| \rightarrow 0$ quando $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \rightarrow 0$. Dessa forma, encontramos a expressão

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle f(\mathbf{x}) \rangle &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| < \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') \right. \\
&+ \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| < \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z} \left[\sum_i (x_i - z_i) \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (x_i - z_i)(x_j - z_j) \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial z_i \partial z_j} \right] P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') \\
&+ \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| < \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z} |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2 R(\mathbf{x}, \mathbf{z}) P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') \\
&+ \iint_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| \geq \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z} f(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') \\
&\left. - \iint d\mathbf{x} d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) P(\mathbf{x}, t + \Delta t | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') \right\}. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Note que a integral em \mathbf{x} no último termo de (2.21) resulta em 1 e ele se reduz ao último termo da equação (2.18). Analisando separadamente os termos da equação (2.21) conclui-se que:

Linha 2: Assumindo convergência uniforme, tomamos o limite dentro da integral e usando as definições dos coeficientes de deriva e difusão, equações (2.15) e (2.16), obtemos

$$\int d\mathbf{z} \left[\sum_i D_i^{(1)}(\mathbf{z}) \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} + \sum_{ij} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{z}) \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial z_i \partial z_j} \right] P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{2.22}$$

Linha 3: Este termo de anula pois $R(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Linha 1,4 e 5: Combinando essas linhas e usando a definição (2.14) temos

$$\int \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| \geq \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) [W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') - W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')]. \tag{2.23}$$

Finalmente, combinando as passagens descritas acima e tomando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, encontramos

$$\begin{aligned}
\partial_t \int d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') &= \int d\mathbf{z} \left[\sum_i D_i^{(1)}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} + \sum_{i,j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial z_i \partial z_j} \right] P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') + \\
&+ \int d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) \left\{ \mathcal{P} \int d\mathbf{x} [W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') - W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')] \right\}, \tag{2.24}
\end{aligned}$$

onde usamos a definição

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| \geq \varepsilon} d\mathbf{x} F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \equiv \mathcal{P} \int d\mathbf{x} F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \tag{2.25}$$

para o valor principal da integral de uma função $F(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Para que (2.24) faça algum sentido, esta integral deve existir. O passo final agora é integrar por partes os termos de (2.24) que

envolvem os coeficientes de deriva e difusão, obtendo

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) \partial_t P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') &= \int d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) \left\{ - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} D_i^{(1)}(\mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') \right. \\ &+ \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') + \\ &\left. + \int d\mathbf{x} [W(\mathbf{z} | \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') - W(\mathbf{z} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')] \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Os termos de superfície não a pareceram pois estamos assumindo condições de contorno nos quais eles se anulam⁵. Como $f(\mathbf{z})$ em (2.26) é uma função arbitrária, vemos que a probabilidade de transição de um processo markoviano satisfaz a equação integro-diferencial

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') &= \left[- \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} D_i^{(1)}(\mathbf{z}, t) + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{z}, t) \right] P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') \\ &+ \int d\mathbf{x} [W(\mathbf{z} | \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') - W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Vemos que as condições (2.14), (2.15) e (2.16) levam a partes distintas da equação interpretadas como processos de salto, deriva e difusão. Em particular, se $D^{(1)} = 0$ e $D^{(2)} = 0$, obtemos a equação mestra

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') = \int d\mathbf{x} [W(\mathbf{z} | \mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') - W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t')]. \quad (2.28)$$

Por outro lado, se as taxas de transição $W(x|z, t) = 0 = W(z|x, t)$, temos a equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t') = \left[- \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} D_i^{(1)}(\mathbf{z}, t) + \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{z}, t) \right] P(\mathbf{z}, t | \mathbf{y}, t'), \quad (2.29)$$

também conhecida como equação de Kolmogorov⁶.

Nesta dissertação estamos interessados na modelagem de ensembles de matrizes aleatórias através da equação de Fokker-Planck. Na próxima seção faremos a conexão entre a Teoria de Processos Estocásticos e os Ensembles de Movimento Browniano.

2.4 Processos Estocásticos e Ensembles de Movimento Browniano

Considere uma variável estocástica matricial $\Xi(t) = \text{diag}(\xi_1(t), \dots, \xi_N(t))$ que executa um processo markoviano, sendo $a \leq \xi_i(t) \leq b$. Esta variável possui uma densidade de probabilidade de encontrarmos a realização $\Xi(t) = X = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$ dada por

$$P(X, t) = \langle \delta(X - \Xi(t)) \rangle = \int dX_0 P(X, t | X_0, t_0) P(X_0, t_0), \quad (2.30)$$

⁵Para mais detalhes veja a referência [43].

⁶Por causa de estudos independentes realizados por Andrey Kolmogorov e Max Planck, juntamente com seu estudante de doutorado Adriaan Fokker.

onde $dX_0 = \prod_{i=1}^N dx_{0i}$, $a \leq x_{0i} \leq b$ e $P(X, t | X_0, t_0)$ é a probabilidade de transição. Como visto na seção anterior(2.13), para processos contínuos a probabilidade de transição satisfaz à equação

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{FP} \right) P(X, t | X_0, t_0) = 0 \tag{2.31}$$

onde introduzimos o operador de Fokker-Planck

$$\mathcal{L}_{FP} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(X, t) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(X, t). \tag{2.32}$$

A referência [42] obteve o modelo de Movimento Browniano dos Ensembles de Polinômios Ortogonais impondo algumas condições ao processo markoviano:

1. **Continuidade da trajetórias:** $W(X | Y, t) = W(Y | X, t) = 0$, que significa eliminar os processos de salto, portanto o segundo termo do lado direito de (2.27) se anula.
2. **Homogeneidade:** $D^{(i)}(X, t) = D^{(i)}(X)$, para $i = 1, 2$ e $\forall t$; implica que a variável estocástica matricial $Z(t)$ evolui com o passar do tempo para uma distribuição estacionária.
3. **Distribuição de equilíbrio dos Polinômios Ortogonais da TMA:** Assumiram que a distribuição de equilíbrio dada pela função de distribuição conjunta de um dos Ensembles de Polinômios Ortogonais da TMA; onde $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X, t) = P_{eq}(X) = C_N J_\beta \omega_N$, sendo $J_\beta = \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta$ e $\omega_N = \prod_{i=1}^N \omega(x_i)$.
4. **Conjunto completo de autofunções polinomiais generalizadas para o operador auto-adjunto \mathcal{H} :** O operador \mathcal{H} é definido por

$$\mathcal{H} = -(\omega_N J_\beta^{1/2})^{-1} \mathcal{L}_{FP} (\omega_N J_\beta^{1/2}) = \mathcal{H}^\dagger. \tag{2.33}$$

Como resultado, o processo markoviano que satisfaz às condições impostas obedece a seguinte equação de Fokker-Planck

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_{FP} \right) P(X, t | X_0, t_0) = 0 \tag{2.34}$$

onde

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} s(x_i) J_\beta \omega_N \frac{\partial}{\partial x_i} (J_\beta \omega_N)^{-1}, \tag{2.35}$$

ou na forma convencional[46]

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_{i=1}^N \left[- \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} D_i^{(2)} \right], \tag{2.36}$$

sendo os coeficientes de difusão e de deriva dados respectivamente por

$$D_i^{(1)} = r(x_i) + \beta \sum_{j(\neq i)}^N \frac{s(x_i)}{x_i - x_j} \quad \text{e} \quad D_i^{(2)} = s(x_i). \quad (2.37)$$

Definimos também o operador adjunto, \mathcal{L}_{FP}^\dagger , pela relação

$$\int d^N x P_1(\{x\}) \mathcal{L}_{FP} P_2(\{x\}) = \int d^N x P_2(\{x\}) \mathcal{L}_{FP}^\dagger P_1(\{x\}). \quad (2.38)$$

que na forma padrão toma a forma

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_{i=1}^N \left[D_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i} + D_i^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right]. \quad (2.39)$$

Algumas considerações devem ser feitas sobre as condições anteriores.

A primeira condição é imposta para eliminar os processos de salto e implica eliminação do segundo termo do lado direito da eq. (2.27). Para que o processo seja homogêneo, isto significa que a variável estocástica, $\Xi(t)$, tende para uma distribuição estacionária. Na condição (iii), exige-se que a solução estacionária do processo estocástico coincida com os ensembles de polinômios ortogonais da teoria de matrizes aleatórias e que a corrente de probabilidade deva anular-se no equilíbrio.

A última condição, que foi motivada pelos resultados das refs. [46] e [47] e pressupõe a existência de autofunções polinomiais associadas ao operador autoadjunto \mathcal{H} . Por meio de um mapeamento do processo estocástico (descrito portanto uma equação de *Fokker-Planck*) em um sistema quântico interagente do tipo Calogero-Sutherland[48].

Portanto, estas quatro condições fornecem os ingredientes necessários para se definir o modelo de Movimento Browniano de Ensembles de Polinômios Ortogonais. Note que utilizando os coeficientes de deriva e difusão explicitamente, obtemos

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_{i=1}^N \left(r(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + s(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) + \beta \sum_{i \neq j} \frac{s(x_i)}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.40)$$

A conclusão mais relevante desta descrição é que existe uma equação de *Fokker-Planck* para cada classe de simetria da TMA quebradas são especificadas pelas funções $r(x)$ e $s(x)$, e o índice de *Dyson* neste formalismo é um mero parâmetro.

É possível incorporar Ensembles de Matrizes de Transferência⁷[2, 40] e Especificamente para pontos quânticos, a Equação de *Fokker-Planck* pode ser utilizada como uma ferramenta útil para o cálculo de médias no ensemble como veremos no próximo capítulo, porém é necessário tomar o limite $t \rightarrow \infty$ para que a solução atinja o equilíbrio e coincida com a distribuição de níveis (que é estacionária).

⁷Tais Ensembles são usados na descrição de transporte em fios quânticos.

Método da Equação de Movimento

Anteriormente mencionamos sobre os Ensembles de Polinômios Ortogonais da Teoria de Matrizes Aleatórias¹. O conhecimento da distribuição conjunta de níveis permite o cálculo das funções de correlação e, conseqüentemente, médias de observáveis de sistemas físicos descritos por esses modelos. Especificamente, se $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$ é uma função arbitrária dos níveis, seu valor médio é dado por

$$\langle F \rangle_{\text{eq}} = \frac{1}{Z_\beta} \int_a^b dx_1 \dots \int_a^b dx_N F(x_1, \dots, x_N) \prod_{i < j} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1}^N w(x_i). \quad (3.1)$$

O cálculo da integral (3.1) para valores arbitrários de N e β é um problema não trivial para qualquer escolha da função peso $w(x)$. Tais integrais com peso de Jacobi são importantes no cálculo de observáveis de transporte como condutância e ruído de disparo em cavidades balísticas caóticas modeladas pelos Ensembles Circulares. Com o intuito de resolver este problema específico, na última década foram introduzidos novos métodos analíticos baseados em extensões das integrais de Selberg [22] e em propriedades de funções simétricas como polinômios de Jack [50, 51, 52]. Um método alternativo, introduzido na referência [53], explora o conceito de Ensemble de Movimento Browniano para o cálculo das médias. A idéia por trás do método consiste em encontrar equações de movimento para as médias e, a partir delas, obter a solução da integral (3.1) no limite $t \rightarrow \infty$, quando a distribuição relaxa para o equilíbrio². Neste capítulo vamos revisar e generalizar este método.

3.1 Método da Equação de Movimento

A média (3.1) envolve as distribuições conjuntas dos ensembles de polinômios ortogonais $P(x_1, \dots, x_N)$. Tais integrais podem ser resolvidas tratando-se estas distribuições como soluções de equilíbrio de um processo estocástico descrito por uma equação de Fokker-Planck apropriadamente construída. Neste processo fora do equilíbrio, a média no ensemble de uma função arbitrária $F = F(\{x\}) = F(x_1, \dots, x_N)$ é dada por

$$\langle F \rangle_t = \int d^N x F(\{x\}) P(\{x\}; t). \quad (3.2)$$

Como $P(\{x\}; t)$ satisfaz à equação de Fokker-Planck, a evolução temporal desse valor médio é dada por

¹Para uma revisão sobre tais Ensembles veja [22, 49]

²Este é o motivo do subscrito eq na equação (3.1)

$$\frac{d}{dt}\langle F \rangle_t = \int d^N x F(\{x\}) \frac{\partial}{\partial t} P(\{x\}; t) \quad (3.3)$$

$$= \int d^N x F(\{x\}) \mathcal{L}_{FP} P(\{x\}; t) \quad (3.4)$$

$$= \int d^N x P(\{x\}; t) \mathcal{L}_{FP}^\dagger F(\{x\}), \quad (3.5)$$

onde usamos a definição de operador adjunto (2.38)

$$\int d^N x P_1(\{x\}) \mathcal{L}_{FP} P_2(\{x\}; t) = \int d^N x P_2(\{x\}; t) \mathcal{L}_{FP}^\dagger P_1(\{x\}). \quad (3.6)$$

Desta forma, podemos escrever a equação de movimento na forma compacta

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F \rangle_t = \langle \mathcal{L}_{FP}^\dagger F(\{x\}) \rangle. \quad (3.7)$$

Usando a forma explícita do operador de Fokker-Planck adjunto (2.40), temos

$$\frac{d}{dt} \langle F \rangle_t = \sum_{i=1}^N \left[\left\langle r(x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle s(x_i) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \right\rangle \right] + \frac{\beta}{2} \sum_{i \neq j}^N \left\langle \frac{1}{x_i - x_j} \left[s(x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} - s(x_j) \frac{\partial F}{\partial x_j} \right] \right\rangle \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned} r(x) &= r_0 + r_1 x \\ s(x) &= s_0 + s_1 x + s_2 x^2 \end{aligned}$$

com r_0, r_1, s_0, s_1 e s_2 reais.

Para obtermos a equação de evolução temporal da média de um observável, precisamos atuar o operador de Fokker-Planck adjunto nesse observável e calcular as médias que aparecem no lado direito de (3.8), o que pode ser tão complicado quanto o problema original. O problema simplifica substancialmente quando escolhemos somas de potências

$$F = X_n = \sum_{i=1}^N x_i^n, \quad (X_0 = N). \quad (3.9)$$

Como derivadas de potências são triviais, podemos esperar que todas as médias que aparecem em (3.8) envolvem somas das potências ou produtos de somas de potências. Apesar disso, em geral, não é possível a obtenção da dependência temporal da média de forma explícita. Isto está longe de ser um problema, pois desejamos calcular a média no equilíbrio, quando a distribuição relaxa para a distribuição conjunta dos ensembles de polinômios ortogonais da TMA. Neste caso temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle F \rangle_t = \langle F \rangle_{\text{eq}}, \quad (3.10)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d \langle F \rangle}{dt} = 0. \quad (3.11)$$

Nas próximas seções veremos que, escrevendo F em termos de somas de potências, a equação (3.8) no equilíbrio se reduz a equações envolvendo somas de potências que podem ser resolvidas explicitamente.

3.1.1 Considerando a Função $F = X_m$

Como derivadas de potências são potências

$$\frac{\partial}{\partial x_i} X_n = n x_i^{n-1}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} X_n = n(n-1) x_i^{n-2}, \quad (3.13)$$

os dois primeiros termos da equação (3.8) ficam

$$\sum_{i=1}^N r(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} X_n = n [r_0 X_{n-1} + r_1 X_n], \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^N s(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} X_n = n(n-1) [s_0 X_{n-2} + s_1 X_{n-1} + s_2 X_n]. \quad (3.15)$$

O último termo, por sua vez, é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{x_i - x_j} \left[s(x_i) \frac{\partial X_n}{\partial x_i} - s(x_j) \frac{\partial X_n}{\partial x_j} \right] &= n \sum_{i \neq j}^N \frac{x_i^{n-1} s(x_i) - x_j^{n-1} s(x_j)}{x_i - x_j} \\ &= n \left[s_0 \sum_{i \neq j}^N \frac{x_i^{n-1} - x_j^{n-1}}{x_i - x_j} + s_1 \sum_{i \neq j}^N \frac{x_i^n - x_j^n}{x_i - x_j} + s_2 \sum_{i \neq j}^N \frac{x_i^{n+1} - x_j^{n+1}}{x_i - x_j} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Esta equação pode ser simplificada. Para isso, definindo a função

$$\mathcal{G}(n) \equiv \sum_{i \neq j}^N \frac{x_i^n - x_j^n}{x_i - x_j}, \quad (3.17)$$

tal que $\mathcal{G}(0) = 0$ e $\mathcal{G}(1) = N(N-1)$. Para $n > 1$ podemos usar a identidade

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1}. \quad (3.18)$$

Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(n) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i \neq j}^N x_i^{n-k} x_j^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\sum_i^N x_i^{n-k} \sum_{j=1}^N x_j^{k-1} - \sum_{i=1}^N x_i^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

O somatório com sinal negativo em (3.19) surgiu pelo fato de termos considerado na primeira soma dos colchetes a possibilidade de $i = j$, ou seja, o segundo somatório surge para cancelar

os casos em que $i = j$ do primeiro, preservando a restrição inicial em que $i \neq j$. Finalmente, podemos escrever a eq. (3.19) em termos de somas de potências

$$\mathcal{G}(n) = \sum_{k=1}^n X_{n-k}X_{k-1} - nX_{n-1}, \quad n > 1 \quad (3.20)$$

Note que esta equação também é válida para $n = 0$. Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP}^\dagger X_n &= n(r_0X_{n-1} + r_1X_n) + n(n-1)[s_0X_{n-2} + s_1X_{n-1} + s_2X_n] + \\ &+ \frac{n\beta}{2}[s_0\mathcal{G}(n-1) + s_1\mathcal{G}(n) + s_2\mathcal{G}(n+1)] \end{aligned} \quad (3.21)$$

A fim de ilustrar o uso da equação (3.21), vamos escrever explicitamente os casos $n = 1$ e $n = 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP}^\dagger X_1 &= (r_0X_0 + r_1X_1) + \frac{\beta}{2}[s_0\mathcal{G}(0) + s_1\mathcal{G}(1) + s_2\mathcal{G}(2)] \\ &= (r_0N + r_1X_1) + \frac{\beta}{2}[s_1N(N-1) + s_2(-2X_1 + 2NX_1)] \\ &= N[r_0 + \frac{\beta}{2}s_1(N-1)] + [r_1 + \beta s_2(N-1)]X_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP}^\dagger X_2 &= 2(r_0X_1 + r_1X_2) + 2(s_0X_0 + s_1X_1 + s_2X_2) + \beta[s_0\mathcal{G}(1) + s_1\mathcal{G}(2) + s_2\mathcal{G}(3)] \\ &= 2(s_0N + (r_0 + s_1)X_1 + (r_1 + s_2)X_2) \\ &\quad + \beta[s_0N(N-1) + s_1(-2X_1 + 2NX_1) + s_2(2NX_2 + X_1^2 - 3X_2)] \\ &= 2s_0((N-1)N\beta + 2N) + (s_1((N-1)\beta + 1) + r_0)X_1 \\ &\quad + (s_2(2N\beta - 3\beta + 2) + 2r_1)X_2 + \beta s_2X_1^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Vemos que a equação (3.23) envolve o termo de segunda ordem X_1^2 . Ele pode ser tratado como um caso particular de um produto X_nX_m para $n = m = 1$.

3.1.2 Considerando a Função $F = X_nX_m$

Analogamente a seção anterior, iniciamos com o cálculo das derivadas. Usando a regra do produto, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i} X_nX_m = mx_i^{m-1}X_n + nx_i^{n-1}X_m, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} X_nX_m = m(m-1)x_i^{m-2}X_n + n(n-1)x_i^{n-2}X_m + 2nmx_i^{n+m-2}. \quad (3.25)$$

Desta forma, os dois primeiros termos da equação (3.8) ficam

$$\sum_{i=1}^N r(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} X_n X_m = r_0 [mX_{m-1}X_n + nX_{n-1}X_m] + r_1(n+m)X_n X_m, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N s(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} X_n X_m &= s_0 [m(m-1)X_{m-2}X_n + n(n-1)X_{n-2}X_m + 2nmX_{n+m-2}] + \\ &+ s_1 [m(m-1)X_{m-1}X_n + n(n-1)X_{n-1}X_m + 2nmX_{n+m-1}] + \\ &+ s_2 [m(m-1)X_m X_n + n(n-1)X_n X_m + 2nmX_{n+m}]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para o terceiro termo de (3.8), usamos

$$\begin{aligned} s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} X_n X_m &= s_0 [mx_i^{m-1}X_n + nx_i^{n-1}X_m] + s_1 [mx_i^m X_n + nx_i^n X_m] + s_2 [mx_i^{m+1}X_n + nx_i^{n+1}X_m] \\ &= mX_n [s_0 x_i^{m-1} + s_1 x_i^m + s_2 x_i^{m+1}] + nX_m [s_0 x_i^{n-1} + s_1 x_i^n + s_2 x_i^{n+1}], \end{aligned}$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{x_i - x_j} \left[s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} - s(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] X_n X_m &= mX_n [s_0 \mathcal{G}(m-1) + s_1 \mathcal{G}(m) + s_2 \mathcal{G}(m+1)] + \\ &+ nX_m [s_0 \mathcal{G}(n-1) + s_1 \mathcal{G}(n) + s_2 \mathcal{G}(n+1)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dessa forma, obtemos o resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP}^\dagger X_n X_m &= r_0 [mX_{m-1}X_n + nX_{n-1}X_m] + r_1(n+m)X_n X_m + \\ &+ s_0 [m(m-1)X_{m-2}X_n + n(n-1)X_{n-2}X_m + 2nmX_{n+m-2}] + \\ &+ s_1 [m(m-1)X_{m-1}X_n + n(n-1)X_{n-1}X_m + 2nmX_{n+m-1}] + \\ &+ s_2 [m(m-1)X_m X_n + n(n-1)X_n X_m + 2nmX_{n+m}] + \\ &+ \frac{\beta}{2} \left\{ mX_n [s_0 \mathcal{G}(m-1) + s_1 \mathcal{G}(m) + s_2 \mathcal{G}(m+1)] + \right. \\ &\left. + nX_m [s_0 \mathcal{G}(n-1) + s_1 \mathcal{G}(n) + s_2 \mathcal{G}(n+1)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

No caso em que $n = m = 1$, a equação (3.29) se reduz a

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger X_1^2 = 2Ns_0 + (s_1(N^2\beta - N\beta + 2) + 2Nr_0)X_1 + 2s_2X_2 + 2((N-1)s_2\beta + r_1)X_1^2 \quad (3.30)$$

A equação (3.29) pode ser estendida para a ação do operador de Fokker Planck adjunto num produto de um número arbitrário de somas de potências.

3.1.3 Caso geral $F = X_\lambda = X_{\lambda_1} X_{\lambda_2} \dots X_{\lambda_n}$

Neste ponto, vamos estender para o observável geral $X_\lambda = X_{\lambda_1} X_{\lambda_2} \dots X_{\lambda_n}$ o que foi feito anteriormente para os observáveis X_n e $X_n X_m$. A extensão das derivadas (3.12) e (3.13) para o

caso de um número arbitrário de fatores é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_i} X_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i X_{\lambda_i} \tilde{X}_\lambda^{(i)} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} X_\lambda = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i (\lambda_i - 1) X_{\lambda_i} \tilde{X}_\lambda^{(i)} + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j X_{\lambda_i + \lambda_j - 2} \tilde{X}_\lambda^{(i,j)}, \quad (3.32)$$

onde $\ell(\lambda)$ é o comprimento da partição $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, ou seja, o número de fatores na decomposição de X_λ , e

$$\tilde{X}_\lambda^{(i)} = \frac{X_\lambda}{X_{\lambda_i}} = X_{\lambda_1} \dots X_{\lambda_{i-1}} X_{\lambda_{i+1}} \dots X_{\lambda_n}, \quad (3.33)$$

ou seja, é decomposição de X_λ com o fator X_{λ_i} excluído. Analogamente

$$\tilde{X}_\lambda^{(i,j)} = \frac{X_\lambda}{X_{\lambda_i} X_{\lambda_j}} = X_{\lambda_1} \dots X_{\lambda_{i-1}} X_{\lambda_{i+1}} \dots X_{\lambda_{j-1}} X_{\lambda_{j+1}} \dots X_{\lambda_n}, \quad (3.34)$$

representa a decomposição de X_λ sem o fatores X_{λ_i} e X_{λ_j} . Dessa forma, temos os termos

$$\sum_{i=1}^N r(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{F} = r_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i X_{\lambda_i - 1} \tilde{X}_\lambda^{(i)} + r_1 |\lambda| X_\lambda, \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N s(x_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \mathcal{F} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (\lambda_i - 1) \tilde{X}_\lambda^{(i)} \left[s_0 X_{\lambda_i - 2} + s_1 X_{\lambda_i - 1} + s_2 X_{\lambda_i} \right] + \\ &+ 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \tilde{X}_\lambda^{(i,j)} \left[s_0 X_{\lambda_i + \lambda_j - 2} + s_1 X_{\lambda_i + \lambda_j - 1} + s_2 X_{\lambda_i + \lambda_j} \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\sum_{i \neq j} \frac{s(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{F} - s(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{F}}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{X}_\lambda^{(i)} \left[s_0 \mathcal{G}(\lambda_i - 1) + s_1 \mathcal{G}(\lambda_i) + s_2 \mathcal{G}(\lambda_i + 1) \right], \quad (3.37)$$

onde $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ é o peso da partição λ . Combinando tudo, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP}^\dagger X_\lambda &= r_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i X_{\lambda_i - 1} \tilde{X}_\lambda^{(i)} + r_1 |\lambda| X_\lambda + \\ &+ \sum_{i=1}^n \lambda_i (\lambda_i - 1) \tilde{X}_\lambda^{(i)} \left[s_0 X_{\lambda_i - 2} + s_1 X_{\lambda_i - 1} + s_2 X_{\lambda_i} \right] \\ &+ 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \tilde{X}_\lambda^{(i,j)} \left[s_0 X_{\lambda_i + \lambda_j - 2} + s_1 X_{\lambda_i + \lambda_j - 1} + s_2 X_{\lambda_i + \lambda_j} \right] \\ &+ \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{X}_\lambda^{(i)} \left[s_0 \mathcal{G}(\lambda_i - 1) + s_1 \mathcal{G}(\lambda_i) + s_2 \mathcal{G}(\lambda_i + 1) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Este é o resultado principal deste capítulo. Ele permite encontrar a equação de movimento para um produto de um número arbitrário de somas de potências e pode ser facilmente implementada em softwares de computação algébrica. A seguir descreveremos como as médias são calculadas.

3.1.4 Cálculo das médias

O caso mais simples ocorre quando $n = 1$. Neste caso, usando (3.22) temos a equação de movimento

$$\frac{dX_1}{dt} = \left[r_0 + \frac{\beta}{2}s_1(N-1) \right] + [r_1 + \beta s_2(N-1)]X_1, \quad (3.39)$$

que no equilíbrio³, resulta numa equação do primeiro grau para $\langle X_1 \rangle$, cuja solução é

$$\langle X_1 \rangle = \frac{-N \left[r_0 + \frac{\beta}{2}s_1(N-1) \right]}{r_1 + \beta s_2(N-1)}. \quad (3.40)$$

Nos demais casos, continuamos com equações de primeiro grau mas não com apenas uma equação. Teremos sistemas lineares. O sistema mais simples surge no caso de grau dois, ou seja, quando $F = X_2$ e $F = X_1^2$. Da equação (3.23) vemos que a ação de \mathcal{L}_{FP} em X_2 envolve X_1 , o próprio X_2 e X_1^2 . Por outro lado, de (3.30), vemos que $\mathcal{L}_{FP}X_1^2$ envolve X_1 , o próprio X_1^2 e X_2 . Dessa forma, temos as seguintes equações para as médias no equilíbrio

$$0 = 2Ns_0 + (s_1(N^2\beta - N\beta + 2) + 2Nr_0)\langle X_1 \rangle + 2s_2\langle X_2 \rangle + 2((N-1)s_2\beta + r_1)\langle X_1^2 \rangle \quad (3.41)$$

$$0 = 2s_0((N-1)N\beta + 2N) + (s_1((N-1)\beta + 1) + r_0)\langle X_1 \rangle + (s_2(2N\beta - 3\beta + 2) + 2r_1)\langle X_2 \rangle + \beta s_2\langle X_1^2 \rangle. \quad (3.42)$$

Como $\langle X_1 \rangle$ já está definido em (3.40), as equações (3.41) e (3.42) constituem um sistema 2×2 em $\langle X_2 \rangle$ e $\langle X_1^2 \rangle$. A ordem do sistema a ser resolvido depende do peso da partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ que define os produtos de somas de potências $X_\lambda = X_{\lambda_1}X_{\lambda_2}\dots$. Na tabela 3.1 mostramos as variáveis associadas a cada conjunto de partições com pesos de 1 a 8. Temos dessa forma uma hierarquia de sistemas lineares, onde cada linha da tabela 8 alimenta os coeficientes da linha seguinte. Resolvemos essa hierarquia para os casos mostrados na tabela 3.1.

As respostas obtidas dependem do índice de Dyson β e das constantes r_0, r_1, s_0, s_1 e s_2 definidas a partir da função peso dos polinômios ortogonais. Dessa forma, por simples escolha desses parâmetros, obtemos as soluções para qualquer classe de ensembles de polinômios ortogonais clássicos. Na próxima seção aplicaremos o método para médias nos ensembles circulares.

3.2 Aplicação do método para pontos quânticos

Observáveis de transporte podem ser convenientemente escritos em termos de somas de potências. Por exemplo, os cumulantes da estatística de contagem de carga podem ser escritos como

$$q_n = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p p! S(k, p+1) X_p, \quad (3.43)$$

³Aqui deixaremos de escrever o subscrito eq.

peso $ \lambda $	# partições	incógnitas do sistema
1	1	$\langle X_1 \rangle$
2	2	$\langle X_2 \rangle, \langle X_1^2 \rangle$
3	3	$\langle X_3 \rangle, \langle X_2 X_1 \rangle, \langle X_1^3 \rangle$
4	5	$\langle X_4 \rangle, \langle X_3 X_1 \rangle, \langle X_2 X_2 \rangle, \langle X_2 X_1^2 \rangle, \langle X_1^4 \rangle$
5	7	$\langle X_5 \rangle, \langle X_4 X_1 \rangle, \langle X_3 X_2 \rangle, \langle X_3 X_1^2 \rangle, \langle X_2^2 X_1 \rangle, \langle X_2 X_1^3 \rangle, \langle X_1^5 \rangle$
6	11	$\langle X_6 \rangle, \langle X_5 X_1 \rangle, \langle X_4 X_2 \rangle, \langle X_3 X_3 \rangle, \langle X_3 X_2 X_1 \rangle, \langle X_3 X_1^3 \rangle, \langle X_2^3 \rangle, \langle X_2^2 X_1^2 \rangle, \langle X_2 X_1^4 \rangle, \langle X_1^6 \rangle$
7	15	$\langle X_7 \rangle, \langle X_6 X_1 \rangle, \langle X_5 X_2 \rangle, \langle X_5 X_1^2 \rangle, \langle X_4 X_3 \rangle, \langle X_4 X_2 X_1 \rangle, \langle X_4 X_1^3 \rangle, \langle X_3^2 X_1 \rangle, \langle X_3 X_2^2 \rangle, \langle X_3 X_2 X_1^2 \rangle, \langle X_3 X_1^4 \rangle, \langle X_2^3 X_1 \rangle, \langle X_2^2 X_1^3 \rangle, \langle X_2 X_1^5 \rangle, \langle X_1^7 \rangle$
8	22	$\langle X_8 \rangle, \langle X_7 X_1 \rangle, \langle X_6 X_2 \rangle, \langle X_6 X_1^2 \rangle, \langle X_5 X_3 \rangle, \langle X_5 X_2 X_1 \rangle, \langle X_5 X_1^3 \rangle, \langle X_4^2 \rangle, \langle X_4 X_3 X_1 \rangle, \langle X_4 X_2^2 \rangle, \langle X_4 X_2 X_1^2 \rangle, \langle X_4 X_1^4 \rangle, \langle X_3^3 X_2 \rangle, \langle X_3^2 X_1^2 \rangle, \langle X_3 X_2^2 X_1 \rangle, \langle X_3 X_2 X_1^3 \rangle, \langle X_3 X_1^5 \rangle, \langle X_2^4 \rangle, \langle X_2^3 X_1^2 \rangle, \langle X_2^2 X_1^4 \rangle, \langle X_2 X_1^6 \rangle, \langle X_1^8 \rangle$

Tabela 3.1 Médias calculadas para as partições λ dos com peso de 1 a 8.

onde $S(k, p+1)$ são os números de Stirling de segunda espécie[54]. Abaixo listamos os quatro primeiros cumulantes

$$g = X_1 \quad (3.44)$$

$$p = X_1 - X_2 \quad (3.45)$$

$$\kappa = X_1 - 3X_2 + 2X_3 \quad (3.46)$$

$$\zeta = X_1 - 7X_2 + 12X_3 - 6X_4 \quad (3.47)$$

No caso quiral, devemos fazer a substituição $x_i \rightarrow 1 - x_i^2$ nos autovalores de transmissão, o que implica

$$g_{ch} = N - X_2 \quad (3.48)$$

$$p_{ch} = X_2 - X_4 \quad (3.49)$$

$$\kappa_{ch} = -X_2 + 3X_4 - 2X_6 \quad (3.50)$$

$$\zeta_{ch} = X_2 - 7X_4 + 12X_6 - 6X_8 \quad (3.51)$$

Dessa forma, qualquer potência desses observáveis pode ser escrita em termos de produtos de somas do tipo $X_\lambda = X_{\lambda_1} X_{\lambda_2} \dots$. Consequentemente, podemos usar as médias listadas na tabela 3.1 para obter os oito primeiros momentos de g , os quatro primeiros de p , e os dois primeiros de κ e ζ . No caso quiral, por sua vez, podemos calcular os quatro primeiros momentos de g , os dois primeiros de p e os primeiros momentos de κ e ζ . A partir dos momentos, podemos calcular os cumulantes estatísticos a partir da relação de recorrência [55]

$$C_n = \mathcal{M}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} C_k \mathcal{M}_{n-k},$$

onde \mathcal{M}_n e C_n denotam momentos e cumulantes, respectivamente. As soluções para as classes Wigner-Dyson, quiral e BdG são obtidas ajustando-se os parâmetros r_0, r_1, s_0, s_1 e s_2 de acordo com a tabela 3.2.

Classe	s_0	s_1	s_2	r_0	r_1	a	b
Wigner-Dyson	0	1	-1	$(1+m)\beta/2$	$-(\beta+2+m\beta)/2$	0	1
Quiral	1	0	-1	$-\beta m/2$	$-\beta(m+2)/2$	-1	1
BdG	0	1	-1	$(1+m)\beta/2$	$-(\beta+2+m\beta+\gamma)/2$	0	1

Tabela 3.2 Coeficientes para os Ensembles Circulares.

Nas próximas seções mostraremos alguns resultados obtidos.

3.2.1 Classes Wigner-Dyson e BdG

Estas classes podem ser tratadas juntas. Os resultados da BdG se reduzem aos da Wigner-Dyson para $\gamma = 0$.

- **Condutância** Os quatro primeiros cumulantes da condutância foram obtidos na referência[56]. Eles podem ser escritos em termos dos momentos como

$$\langle\langle g \rangle\rangle = \langle X_1 \rangle, \quad (3.52)$$

$$\langle\langle g^2 \rangle\rangle = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2, \quad (3.53)$$

$$\langle\langle g^3 \rangle\rangle = \langle X_1^3 \rangle - 3\langle X_1^2 \rangle \langle X_1 \rangle + 2\langle X_1 \rangle^3, \quad (3.54)$$

$$\langle\langle g^4 \rangle\rangle = \langle X_1^4 \rangle - 3\langle X_1^2 \rangle^2 - 4\langle X_1 \rangle \langle X_1^3 \rangle + 12\langle X_1 \rangle \langle X_1^3 \rangle - 6\langle X_1 \rangle^4. \quad (3.55)$$

$$(3.56)$$

Coletando os coeficientes adequados da tabela (3.2), podemos escrever os três primeiros cumulantes na forma compacta

$$\langle\langle g \rangle\rangle = \frac{N_1 N_2}{N_T + \xi}, \quad (3.57)$$

$$\langle\langle g^2 \rangle\rangle = \frac{2N_1 N_2 (N_1 + \xi)(N_2 + \xi)}{\beta (N_T + \xi)^2 (N_T + \xi - 1)(N_T + \xi + 2/\beta)}, \quad (3.58)$$

$$\frac{\langle\langle g^3 \rangle\rangle}{\langle\langle g^2 \rangle\rangle \langle g \rangle} = \frac{4(\xi^2 - (N_1 - N_2)^2)}{\beta N_1 N_2 (N_T + \xi + 4/\beta)(N_T + \xi - 2)}. \quad (3.59)$$

onde definimos $\xi = (2 + \gamma - \beta)/\beta$. A expressão para o quarto cumulante da condutância é inconvenientemente grande e não será mostrada aqui. No caso Wigner-Dyson, $\gamma = 0$, a contribuição destes cumulantes para a distribuição completa da condutância foi analisada em [57] por meio da expansão de Edgeworth.

De posse dos resultados exatos, é interessante obter a expansão semiclássica, ou seja, quando $N_1, N_2 \gg 1$. Neste limite podemos escrever

$$\langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} + \frac{\beta - 2 - \gamma}{\beta} \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2} + \dots \quad (3.60)$$

O primeiro termo corresponde a condutância clássica e segundo termo conhecido na literatura como correção de localização fraca. Para a variância da condutância, temos

$$\text{var } g = \frac{2N_1^2 N_2^2}{\beta(N_1 + N_2)^4} + \dots \quad (3.61)$$

Os termos dominantes nessas expansões, que não dependem do índice de simetria γ , são válidos para as classes WD e BdG. A distinção entre as classes só se manifesta nos próximos termos das expansões.

- **Potência do ruído de disparo**

A potência do ruído de disparo é definida por $p = X_1 - X_2$, portanto sua média é

$$\langle p \rangle = \frac{N_1 N_2 \beta (N_1 + \xi)(N_2 + \xi)}{(N_T + \xi)(N_T + \xi - 1)[\beta(N_T + \xi) + 2]}, \quad (3.62)$$

No limite semiclássico (3.62) se reduz a

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{N_1^2 N_2^2}{(N_1 + N_2)^3} \\ &+ \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^4} \left[\frac{(2 - \beta)}{\beta} (N_1 - N_2)^2 + \frac{\gamma}{\beta} (N_1^2 + N_2^2 - N_1 N_2) \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.63)$$

A variância de p , por sua vez, é dada por $\text{var}(p) = \langle X_1^2 \rangle - \langle X_1 \rangle^2 + \langle X_2^2 \rangle - \langle X_2 \rangle^2 - 2(\langle X_2 X_4 \rangle - \langle X_2 \rangle \langle X_4 \rangle)$. Esta expressão é muito longa no caso geral, mas no caso de contatos simétricos $N_1 = N_2 = N$ pode ser escrita como

$$\frac{\text{var } p}{\langle p \rangle} = \begin{cases} \frac{(2N^2 + 4N - 3)(N^2 - 2)}{2(2N + 1)(2N - 3)(N + 3)(1 + N)(2N - 1)} & , (\beta = 1, \gamma = -1) \\ \frac{2(512N^6 - 768N^5 - 1248N^4 + 1568N^3 + 952N^2 - 680N - 255)}{(4N - 1)(4N + 5)(4N - 7)(4N + 1)(4N - 3)(4N + 3)(4N - 5)} & , (\beta = 2, \gamma = -1) \\ \frac{(8N^2 - 8N - 3)(2N^2 - 1)}{2(4N + 3)(4N - 1)(2N - 3)(4N + 1)(2N - 1)} & , (\beta = 4, \gamma = 2) \\ \frac{2(512N^6 + 768N^5 - 1248N^4 - 1568N^3 + 952N^2 + 680N - 255)}{(4N + 1)(4N + 7)(4N - 5)(4N - 1)(4N + 3)(4N + 5)(4N - 3)} & , (\beta = 2, \gamma = 1). \end{cases} \quad (3.64)$$

3.2.2 Classes Quirais

- **Condutância**

Da tabela (3.2) nós temos para a média da condutância

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= N - \langle X_2 \rangle \\ &= \frac{4(N_1 N_2)^2 \beta}{(N_1 + N_2 - 1)(N_1 + N_2)(2 + (N_1 + N_2)\beta)}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Este resultado foi obtido na referência [58] através do método da equação de movimento. No limite semiclássico, temos a expansão

$$\langle g \rangle \approx \frac{4(N_1 N_2)^2}{(N_1 + N_2)^3} + \frac{4(N_1 N_2)^2(\beta - 2)}{(N_1 + N_2)^4 \beta} + \dots \quad (3.66)$$

note que o termo dominante desta expansão é diferente daquele obtido para a classe Wigner-Dyson e que para o caso de contatos simétricos, ($N_1 = N_2 = N$), elas coincidem.

• Potência do Ruído de disparo

A potência do ruído de disparo para a classe quirral baseado na tabela (3.2) pode ser calculada a partir de

$$\langle p \rangle = \langle X_2 \rangle - \langle X_4 \rangle. \quad (3.67)$$

O caso de contatos com números de canais (N_1, N_2) arbitrários gera um resultado grande para ser colocado aqui e mostraremos somente o caso de contatos simétricos $N_1 = N_2 = N$,

$$\langle p \rangle = \frac{N^3 \beta (N^3 \beta^2 - 2\beta^2 N^2 + 4\beta N^2 + \beta^2 N - 8\beta N + 4N + 3\beta - 6)}{(\beta N + 1)(\beta N + 3)(2\beta N + 2 - \beta)(2N - 3)(2N - 1)}. \quad (3.68)$$

Por outro lado, a expansão semiclássica de $\langle p \rangle$ é dada por

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{4N_1^2 N_2^2 (N_1^4 - 4N_1^3 N_2 + 10N_1^2 N_2^2 - 4N_1 N_2^3 + N_2^4)}{(N_1 + N_2)^7} \\ &+ \frac{4(\beta - 2)N_1^2 N_2^2}{\beta (N_1 + N_2)^8} (5N_1^4 - 28N_1^3 N_2 + 50N_1^2 N_2^2 - 28N_1 N_2^3 + 5N_2^4) + \dots \end{aligned} \quad (3.69)$$

No caso simétrico esta expressão se reduz a

$$\langle p \rangle = \frac{N}{8} + \frac{\beta - 2}{16\beta} + \dots, \quad (3.70)$$

o que está de acordo com os resultados obtidos em [59].

A variância por sua vez, pode ser escrita como

$$\text{var}(p) = \langle X_2^2 \rangle - \langle X_2 \rangle^2 + \langle X_4^2 \rangle - \langle X_4 \rangle^2 - 2(\langle X_2 X_4 \rangle - \langle X_2 \rangle \langle X_4 \rangle). \quad (3.71)$$

Como é de se esperar a expressão obtida é muito grande para ser apresentada. O termo dominante da expansão semiclássica no caso de contatos simétricos tem a forma universal

$$\text{var}(p) = \frac{1}{32\beta}. \quad (3.72)$$

A convergência para esses valores é mostrada na figura 3.1 nos casos ortogonal ($\beta = 1$), unitário ($\beta = 2$) e simplético ($\beta = 4$). Um exemplo do caso assimétrico, com $N_1 = 7$, é

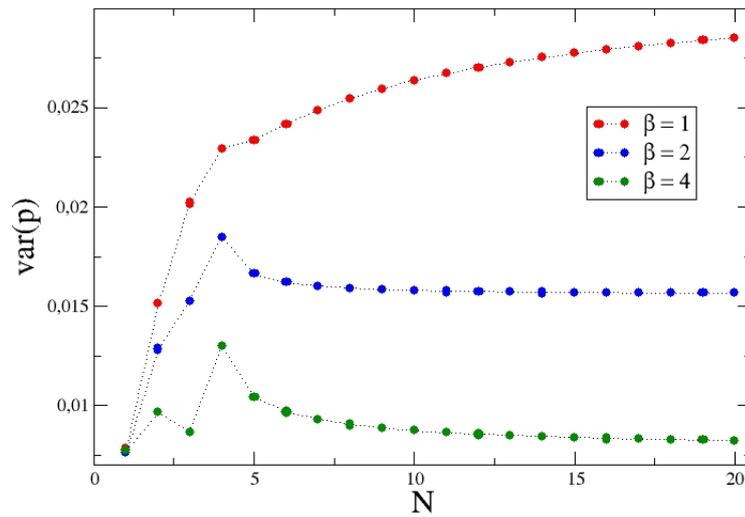


Figura 3.1 Variância da potência do ruído de disparo no caso de contatos simétricos $N_1 = N_2 = N$.

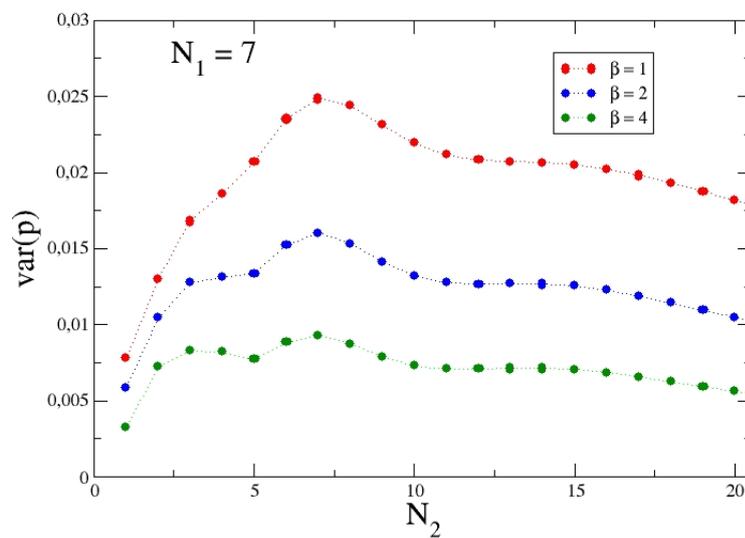


Figura 3.2 Variância da potência do ruído de disparo em função de N_2 para $N_1 = 7$.

mostrado na figura 3.2

O método apresentado neste capítulo é baseado na implementação computacional da equação (3.38). Apesar da construção das equações associadas a todas as partições λ de um dado inteiro n ser rápida, a solução algébrica do sistema obtido torna-se inviável à medida que n cresce. Em nosso caso, conseguimos resolver a hierarquia de sistemas até $n = 8$. As soluções obtidas são extremamente grandes. Por exemplo, as 22 soluções associadas a $n = 8$ ocupam um arquivo de 2 GB. Expressões deste tamanho, além de não poderem ser impressas, acabam perdendo utilidade, pois são difíceis de manipular em pacotes de computação algébrica. No próximo capítulo, contornaremos este problema para o cálculo de valores médios do tipo $\langle X_n \rangle$ no limite semiclássico $N_1, N_2 \gg 1$.

Análise Semiclássica para os Ensembles Circulares da TMA

No capítulo anterior apresentamos um método para o cálculo exato de valores médios de produtos de somas de potências dos níveis válidas para qualquer ensemble de polinômios ortogonais clássicos. Também mostramos aplicações específicas do ensemble de Jacobi a pontos quânticos das dez classes de universalidades da TMA. Apesar da generalidade, o método tem como ponto fraco o rápido crescimento da ordem dos sistemas lineares a serem resolvidos de acordo com o número de partições de inteiros. As soluções tornam-se expressões muito grandes e de difícil manipulação. Dentro dessa limitação resolvemos a hierarquia de sistemas até a ordem $|\lambda| = 8$, o que permitiu o cálculo da variância da potência do ruído de disparo na classe quiral no caso assimétrico $N_1 \neq N_2$. No entanto, cumulantes de ordem superior da ECC ficaram inacessíveis.

Os observáveis estudados no capítulo 3 são todos estatísticas lineares dos níveis, ou seja, são expressões da forma

$$F = \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (4.1)$$

onde $f(x)$ é uma função arbitrária definida em $[a, b]$. A média de F é completamente determinada pela densidade de níveis

$$\langle F \rangle = \int_a^b f(x) \rho(x) dx \quad (4.2)$$

Neste capítulo apresentaremos um método mais eficiente de cálculo de valores médios dessas estatísticas lineares no limite semiclássico. O método é baseado numa expansão assintótica de $\rho(x)$ obtida a partir do método da equação de movimento e foi aplicado a pontos quânticos das classes Wigner-Dyson e quiral na referência [24] para o caso de contatos simétricos $N_1 = N_2$. Nas próximas seções, mostraremos uma generalização desses resultados para o caso assimétrico $N_1 \neq N_2$ aplicável a qualquer cumulante da estatística de contagem de carga.

4.1 Equação de movimento para a densidade de níveis

Um ingrediente fundamental na teoria de matrizes aleatórias é o cálculo de funções de correlação para as diversas classes de simetria[22]. Tais funções de correlação têm conexão direta com os observáveis dos sistemas modelados. A partir da densidade de probabilidade

$P(x_1, \dots, x_N, t)$, pode-se definir a função de correlação de n pontos

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{N!}{(N-n)!} \int P(x_1, \dots, x_N, t) dx_{n+1} \dots dx_N. \quad (4.3)$$

Em particular, a função de 1 ponto, também chamada de densidade de níveis, pode ser escrita como

$$\rho_1(x) = \sum_{i=1}^N \langle \delta(x - x_i) \rangle, \quad (4.4)$$

onde $\langle \dots \rangle$ indica média no ensemble $P(x_1, \dots, x_N, t)$. Analogamente, a função de 2-pontos pode ser escrita como

$$\rho_2(x, y) = \sum_{i \neq j} \langle \delta(x - x_i) \delta(y - x_j) \rangle. \quad (4.5)$$

Para ensembles de equilíbrio, pode-se encontrar uma expressão de forma fechada para a função de n -pontos a partir dos métodos dos polinômios ortogonais ($\beta = 2$) ou anti-ortogonais ($\beta = 1$ e 4). Tais métodos não se aplicam ao caso fora do equilíbrio.

Neste capítulo, a fim de obter médias de estatísticas lineares, nos concentraremos na função de 1-ponto ¹ $\rho(x, t)$. Assim como no capítulo 3, estudaremos a evolução temporal de médias $\langle F \rangle$, através da equação

$$\frac{d}{dt} \langle F \rangle_t = \langle \mathcal{L}_{FP}^\dagger F \rangle, \quad (4.6)$$

onde F é uma estatística linear. Neste caso, podemos considerar a evolução temporal da própria densidade de níveis $\rho(x, t)$. Das equações (4.4) e (4.6) vemos que a escolha $F = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)$ nos leva a

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{L}_{FP}^\dagger \delta(x - x_i) \rangle \quad (4.7)$$

$$= \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{L}_{x_i}^\dagger \delta(x - x_i) \rangle. \quad (4.8)$$

Note que a média é tomada nas variáveis x_1, \dots, x_N . Além disso, na última linha, escrevemos o operador de Fokker-Planck adjunto explicitando no subscrito as variáveis envolvidas nas derivadas

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger = \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_{x_i}^\dagger; \quad \mathcal{L}_{x_i}^\dagger = D_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_i} + D_i^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (4.9)$$

Fazendo uso da identidade [46]

$$\mathcal{L}_y \delta(x - y) = \mathcal{L}_x^\dagger \delta(x - y), \quad (4.10)$$

podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \sum_{i=1}^N \langle \mathcal{L}_x \delta(x - x_i) \rangle. \quad (4.11)$$

¹No restante do capítulo omitiremos o subscrito 1 para esta função.

onde

$$\mathcal{L}_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} s(x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(r(x) + \beta \sum_{j(\neq i)} \frac{s(x)}{x - y_j} \right), \quad (4.12)$$

ou, usando a definição de função delta

$$\mathcal{L}_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} s(x) - \frac{\partial}{\partial x} r(x) - \beta s(x) \int dx' \sum_{j(\neq i)} \frac{\delta(x' - x_j)}{x - x'} \quad (4.13)$$

Dessa forma, substituindo o operador (4.13) na equação de movimento (4.11) e usando a definição (4.5) para a função de dois pontos, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} s(x) \rho(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} r(x) \rho(x, t) - \beta \frac{\partial}{\partial x} s(x) P \int dx' \frac{\rho(x, x', t)}{x - x'} \quad (4.14)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[s(x) \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t) + \frac{s'(x) - r(x)}{s(x)} \rho(x, t) - \beta P \int dx' \frac{\rho(x, x', t)}{x - x'} \right) \right], \quad (4.15)$$

onde P denota o valor principal de Cauchy e $s'(x)$ a derivada de $s(x)$. Desta forma, a equação de movimento da função de 1-ponto envolve a de 2-pontos. Em geral a equação de movimento para a função de n -pontos envolve a de $(n + 1)$ -pontos, o que torna sua solução um problema não trivial. Na próxima seção, mostraremos que no limite semiclássico pode-se simplificar a equação (4.15) que, no equilíbrio resulta numa equação integral para a densidade de níveis.

4.2 Equação integral para a densidade de níveis

No capítulo 3 consideramos os níveis definidos no suporte $[a, b]$. No entanto, a fim de compararmos nossos resultados com a literatura, é conveniente fazer a mudança de variáveis

$$x_i = \frac{a\lambda_i + b}{\lambda_i + 1}, \quad 0 \leq \lambda_i < \infty. \quad (4.16)$$

Nas novas variáveis a equação de Fokker-Planck pode ser escrita na forma padrão

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(\{\lambda\}, t) = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda_i} D_i^{(1)}(\{\lambda\}) + \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} D_i^{(2)}(\{\lambda\}) \right) \tilde{P}(\{\lambda\}, t), \quad (4.17)$$

com os novos coeficientes de difusão e de deriva podendo ser escritos através de [Risken]

$$\tilde{D}_i^{(1)}(\{\lambda\}) = \frac{dx_i}{d\lambda_i} D_i^{(1)}(\{x\}) + \frac{d^2 x_i}{d\lambda_i^2} D_i^{(2)}(\{x\}), \quad (4.18)$$

$$\tilde{D}_i^{(2)}(\{\lambda\}) = \left(\frac{dx_i}{d\lambda_i} \right)^2 D_i^{(2)}(\{x\}). \quad (4.19)$$

Dessa forma, podemos escrever [24]

$$D_i^{(2)}(\{\lambda\}) = \tilde{s}(\lambda_i), \quad (4.20)$$

$$D_i^{(1)}(\{\lambda\}) = \tilde{r}(\lambda_i) + \beta \sum_{j(\neq i)} \frac{\tilde{s}(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad (4.21)$$

onde definimos

$$\tilde{s}(\lambda) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2}{(b-a)^2} (1+\lambda)^2 \quad (4.22)$$

$$\tilde{r}(\lambda) = \left[\frac{r(b) + r(a)\lambda}{a-b} \right] (1+\lambda) + [2 - \beta(N-1)] \frac{\tilde{s}(\lambda)}{1+\lambda}, \quad (4.23)$$

com os coeficientes

$$\alpha_0 = s(b), \quad (4.24)$$

$$\alpha_1 = s(a) + s(b) - (b-a)^2 s_2, \quad (4.25)$$

$$\alpha_2 = s(a). \quad (4.26)$$

Como os coeficientes de difusão e deriva (4.20) e (4.21) têm a mesma estrutura da encontrada na equação de Fokker-Planck original, usada na dedução de (4.15), podemos escrever diretamente a equação de movimento da nova densidade de níveis

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(\lambda, t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\tilde{s}(\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{\rho}(\lambda, t) + \frac{\tilde{s}'(\lambda) - \tilde{r}(\lambda)}{\tilde{s}(\lambda)} \tilde{\rho}(\lambda, t) - \beta \mathbb{P} \int d\lambda' \frac{\rho(\lambda, \lambda', t)}{\lambda - \lambda'} \right) \right], \quad (4.27)$$

em que $\tilde{\rho}_2(\lambda, \lambda'; t)$ é a função de 2-pontos nas novas variáveis. Note que esta expressão é exata e válida para N arbitrário. A partir de agora vamos considerar o caso $N \gg 1$ e usar a aproximação de Dyson[60]

$$\mathbb{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}_2(\lambda, \lambda'; t)}{\lambda - \lambda'} \cong \tilde{\rho}(\lambda, t) \left[\mathbb{P} \int_0^\infty \frac{\tilde{\rho}(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'} d\lambda' + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tilde{\rho}(\lambda, t) \right]. \quad (4.28)$$

Substituindo (4.28) em (4.27) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(\lambda, t) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\tilde{s}(\lambda) \tilde{\rho}(\lambda; t) \left(\frac{2-\beta}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tilde{\rho}(\lambda, t) + \frac{\tilde{s}'(\lambda) - \tilde{r}(\lambda)}{\tilde{s}(\lambda)} - \beta \mathbb{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'} \right) \right]. \quad (4.29)$$

No equilíbrio o lado esquerdo se anula assim como o termo entre parênteses, o que resulta na equação integral

$$\mathbb{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{2-\beta}{2\beta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tilde{\rho}(\lambda) + \frac{\tilde{s}'(\lambda) - \tilde{r}(\lambda)}{\beta \tilde{s}(\lambda)}. \quad (4.30)$$

Usando as definições de \tilde{s} e \tilde{r} , eqs. (4.22) e (4.23), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} &= \frac{2 - \beta}{2\beta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tilde{\rho}(\lambda) + \frac{N - 1}{1 + \lambda} \\ &+ \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda}{\beta(\alpha_0 \lambda + \alpha_2 \lambda + \alpha_2 \lambda^2)} + \frac{(b - a)[r(b) + r(a)\lambda]}{\beta(1 + \lambda)(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Esta equação vale para todas as classes dos ensembles de Hermite, Laguerre e Jacobi. Para nossos propósitos, vamos considerar os casos particulares do ensemble de Jacobi associados aos ensembles circulares com a escolha dos parâmetros r_0, r_1, s_0, s_1, s_2 , e dos limites a e b do intervalo de definição dos níveis de acordo com a tabela 4.1

Classe	s_0	s_1	s_2	r_0	r_1	a	b
Wigner-Dyson	0	1	-1	$(1 + m)\beta/2$	$-(\beta + 2 + m\beta)/2$	0	1
Quiral	1	0	-1	$-\beta m/2$	$-\beta(m + 2)/2$	-1	1
BdG	0	1	-1	$(1 + m)\beta/2$	$-(\beta + 2 + m\beta + \gamma)/2$	0	1

Tabela 4.1 Coeficientes para os Ensembles Circulares.

Como em todos os casos $s(a) = s(b) = 0$, podemos escrever (4.31) na forma simplificada

$$\mathbb{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{2 - \beta}{2\beta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tilde{\rho}(\lambda) + \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{r_0 + r_1 b}{(b - a)s_2} \right) \frac{1}{\lambda} + \left(\frac{r_1}{\beta s_2} + N - 1 \right) \frac{1}{1 + \lambda}. \quad (4.32)$$

A seguir, discutiremos a solução desta equação na forma $\tilde{\rho}(\lambda) = \tilde{\rho}_0(\lambda) + \delta\tilde{\rho}(\lambda)$

4.3 Classe BdG/Wigner-Dyson

Com base nos coeficientes fornecidos pela tabela 4.1 e dos valores dos parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ é possível obter a seguinte equação integral

$$\mathbb{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{N_T}{2(1 + \lambda)} + \frac{2 - \beta}{2\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \tilde{\rho}(\lambda) + \frac{1}{1 + \lambda} \right] - \frac{\gamma}{2\beta} \frac{1}{\lambda(1 + \lambda)}, \quad (4.33)$$

onde $N_T = N_1 + N_2$.

Seguindo a referência [24], decompomos a densidade num termo $\tilde{\rho} \approx \tilde{\rho}_0 + \delta\tilde{\rho}$ num termo $\tilde{\rho}_0$ de ordem N e uma correção $\delta\tilde{\rho}$ de ordem N^0 . Neste caso, podemos usar $\ln \tilde{\rho} \approx \ln \tilde{\rho}_0$, e separar a equação integral (4.33) em duas, uma para a parte dominante e outra para a correção

$$\mathbb{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\tilde{\rho}_0(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{N_T}{2(1 + \lambda)} \quad (4.34)$$

$$\mathbb{P} \int_0^\infty d\lambda' \frac{\delta\tilde{\rho}(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{2 - \beta}{2\beta} \left[\frac{\partial \ln \tilde{\rho}_0(\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{1}{1 + \lambda} \right] - \frac{\gamma}{2\beta} \frac{1}{\lambda(1 + \lambda)}. \quad (4.35)$$

4.3.1 Termo dominante

Admitindo que $\tilde{\rho}_0(\lambda)$ se anula para $\lambda \geq \lambda_c$, a densidade deve satisfazer

$$\mathbf{P} \int_0^{\lambda_c} d\lambda' \frac{\tilde{\rho}_0(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = \frac{N_T}{2(1 + \lambda)} \quad (4.36)$$

$$\int_0^{\lambda_c} d\lambda' \tilde{\rho}_0(\lambda') = N. \quad (4.37)$$

A solução dessa equação integral [2] pode ser escrita como

$$\tilde{\rho}_0(\lambda) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{\lambda(\lambda_c - \lambda)}} \left(\pi N - \frac{N_T}{2} \int_0^{\lambda_c} d\lambda' \frac{\sqrt{\lambda'(\lambda_c - \lambda')}}{(1 + \lambda')(\lambda - \lambda')} \right) \quad (4.38)$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{\lambda(\lambda_c - \lambda)}} \left(m - N_T \frac{\sqrt{1 + \lambda_c}}{1 + \lambda} \right), \quad (4.39)$$

onde $m = |N_1 - N_2|$.

O parâmetro livre λ_c é determinado pela condição $\tilde{\rho}_0(\lambda_c) = 0$, o que implica

$$\lambda_c = \frac{N_T^2}{m^2} - 1 = \frac{4N_1N_2}{(N_1 - N_2)^2}. \quad (4.40)$$

Com este valor, a equação (4.39) pode ser reescrita como

$$\tilde{\rho}_0(\lambda) = \frac{\sqrt{N_1N_2}}{\pi(1 + \lambda)} \sqrt{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_c}}, \quad (4.41)$$

que é a solução obtida por *Beenakker* em [2].

Voltando para as variáveis originais do problema

$$x = \frac{1}{1 + \lambda}, \quad (4.42)$$

obtemos a densidade de níveis através da transformação

$$\rho(x) = \tilde{\rho}(\lambda) \frac{d\lambda}{dx}. \quad (4.43)$$

Desta forma, o termo dominante da densidade de níveis² é dada por

$$\rho_0(x) = \frac{N_1 + N_2}{2\pi x} \sqrt{\frac{x - x_c}{1 - x}}, \quad 0 \leq x \leq x_c, \quad (4.44)$$

onde

$$x_c = \left(\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right)^2. \quad (4.45)$$

²Neste caso os níveis x_i são os autovalores de transmissão do sistema.

4.3.2 Correção

Da (4.35), vemos que a equação para a correção na densidade $\delta\tilde{\rho}$ depende da derivada logarítmica do termo dominante ρ_0 . De (4.41), esta derivada é dada por

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln \tilde{\rho}_0 = -\frac{1}{1+\lambda} - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2(\lambda-\lambda_c)}, \quad (4.46)$$

de modo que a correção quântica por sua vez satisfaz

$$\mathbb{P} \int_0^{\lambda_c} d\lambda' \frac{\delta\tilde{\rho}(\lambda')}{\lambda-\lambda'} = \frac{2-\beta}{4\beta} \frac{1}{\lambda-\lambda_c} - \frac{2-\beta+2\gamma}{4\beta\lambda} + \frac{\gamma}{2\beta} \frac{1}{1+\lambda}, \quad (4.47)$$

$$\int_0^{\lambda_c} d\lambda' \delta\tilde{\rho}(\lambda') = 0. \quad (4.48)$$

Uma inspeção na equação (4.47) permite a seguinte decomposição

$$\delta\tilde{\rho}(\lambda) = \frac{2-\beta}{4\beta} \delta(\lambda-\lambda_c) + \frac{\beta-2-2\gamma}{4\beta} \delta(\lambda) + \frac{\gamma}{2\beta} v(\lambda), \quad (4.49)$$

onde a função $v(\lambda)$ satisfaz

$$\mathbb{P} \int_0^{\lambda_c} d\lambda' \frac{v(\lambda')}{\lambda-\lambda'} = \frac{1}{1+\lambda}, \quad (4.50)$$

$$\int_0^{\lambda_c} d\lambda' v(\lambda') = 1, \quad (4.51)$$

que é uma equação do mesmo tipo da resolvida anteriormente. Procedendo de forma similar, encontramos a solução

$$v(\lambda) = \frac{\sqrt{1+\lambda_c}}{\pi(1+\lambda)\sqrt{\lambda(\lambda_c-\lambda)}}. \quad (4.52)$$

Portanto, a correção na densidade de níveis é dada por

$$\delta\tilde{\rho}(\lambda) = \frac{2-\beta}{4\beta} \delta(\lambda-\lambda_c) - \frac{2-\beta+2\gamma}{4\beta} \delta(\lambda) + \frac{\gamma}{2\beta\pi} \frac{\sqrt{1+\lambda_c}}{\pi(1+\lambda)\sqrt{\lambda(\lambda_c-\lambda)}}. \quad (4.53)$$

Nas variáveis originais do problema, podemos escrever

$$\delta\rho(x) = \frac{2-\beta}{4\beta} \delta(x-x_c) - \frac{2-\beta+2\gamma}{4\beta} \delta(x-1) + \frac{\gamma}{2\beta\pi} \frac{1}{\sqrt{(1-x)(x-x_c)}}, \quad (4.54)$$

o que está de acordo com [36].

4.3.3 Média de uma estatística linear

Vimos que o valor esperado de uma estatística linear $F = \sum_i f(x_i)$ é completamente definido pela densidade de níveis

$$\langle F \rangle = \int f(x) \rho(x) dx. \quad (4.55)$$

Usando os resultados da expansão semiclássica para $\rho(x)$ podemos escrever $\langle F \rangle = F_0 + \delta F$, onde

$$F_0 = \frac{N_1 + N_2}{2\pi} \int_{x_c}^1 \sqrt{\frac{x - x_c}{1 - x}} \frac{f(x)}{x} dx, \quad (4.56)$$

$$\delta F = \frac{2 - \beta}{4\beta} f(x_c) - \frac{2 - \beta + 2\gamma}{4\beta} f(1) + \frac{\gamma}{2\beta\pi} \int_{x_c}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{(1 - x)(x - x_c)}} dx. \quad (4.57)$$

A seguir ilustraremos o uso de (4.56) e (4.57) para alguns observáveis.

1. Condutância $f(x) = x$

$$g_0 = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}, \quad (4.58)$$

$$\delta g = \frac{\beta - 2 - \gamma}{\beta} \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2}. \quad (4.59)$$

2. Potência do ruído de disparo $f(x) = x(1 - x)$

$$p_0 = \frac{(N_1 N_2)^2}{(N_1 + N_2)^3}, \quad (4.60)$$

$$\delta p = -\frac{\beta - 2}{\beta} \frac{N_1 N_2 (N_1 - N_2)^2}{(N_1 + N_2)^4} + \frac{\gamma}{2\beta} \frac{N_1 N_2 (N_1^2 - N_1 N_2 + N_2^2)}{(N_1 + N_2)^4}. \quad (4.61)$$

Esses resultados coincidem com as expansões dos resultados exatos obtidos no capítulo 3. É interessante notar que a correção de localização fraca na potência do ruído de disparo é não nula nos casos $\beta = 2$ e $N_1 = N_2$. Finalmente, os resultados reduzem-se ao caso Wigner-Dyson quando $\gamma = 0$.

Nas próximas secções exploraremos outras representações para o F_0 e δF .

4.4 Expansões Semiclássicas em variáveis angulares

Considerando as expressões (4.44) e (4.54) para $\rho_0(x)$ e $\delta\rho(x)$ na seção anterior, é conveniente realizar a seguinte mudança de variável

$$x = 1 - (1 - x_c) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (4.62)$$

Denotando por $\sigma_0(\theta)$ e $\delta\sigma(\theta)$ como o termo dominante e a correção da densidade de níveis na nova variável, podemos escrever

$$\begin{aligned}\sigma_0(\theta) &= \rho(x(\theta)) \left| \frac{dx}{d\theta} \right| \\ &= \frac{N_T}{2\pi} \frac{(1-x_c) \sin^2(\theta/2)}{1 - (1-x_c) \cos^2(\theta/2)}.\end{aligned}\quad (4.63)$$

Usando a definição de x_c , eq. (4.45), podemos escrever

$$\sigma_0(\theta) = \frac{2N_T}{\pi} \xi \frac{\sin^2(\theta/2)}{1 - 4\xi \cos^2(\theta/2)} = \frac{N_T}{2\pi} \left(\frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + \alpha} \right), \quad (4.64)$$

onde definimos

$$\xi = \frac{N_1 N_2}{N_T^2}, \quad (4.65)$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2\xi}. \quad (4.66)$$

$$\delta\sigma(\theta) = \frac{\beta - 2}{4\beta} [\delta(\theta - \pi) - \delta(\theta)] - \frac{\gamma}{2\beta} \delta(\theta - \pi) + \frac{\gamma}{2\beta\pi}. \quad (4.67)$$

4.4.1 Série de Cossenos de Fourier

A função $\sigma_0(\theta)$ é par de período 2π definida em $-\pi \leq \theta \leq \pi$, que pode ser expandida numa série de cossenos de Fourier

$$\sigma_0(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta), \quad (4.68)$$

com coeficientes dados por

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \sigma_0(\theta) \cos(n\theta). \quad (4.69)$$

dessa forma

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \sigma_0(\theta) = \frac{2}{\pi} N, \quad (4.70)$$

$$a_n = \frac{N_T}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \left(\frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + \alpha} \right) \cos(n\theta). \quad (4.71)$$

Na primeira integral usando a normalização para $\sigma_0(\theta)$. Para a segunda integral pode ser executada pelo método dos resíduos. Para isso, introduzimos a variável complexa $z = e^{i\theta}$, de modo que

$$a_n = \frac{N_T}{(2\pi)^2} \oint \frac{dz}{iz} \frac{(z-1)^2 (z^n + z^{-n})}{(z-z_+)(z-z_-)}, \quad (4.72)$$

onde

$$z_+ = \frac{N_>}{N_<}, \quad \text{e} \quad z_- = \frac{N_<}{N_>} \quad (4.73)$$

são as raízes de $z^2 + 2\alpha z + 1$ com $N_<$ e $N_>$ denotando o menor e maior valor entre N_1, N_2 , respectivamente. Dessa forma, temos duas integrais

$$a_n = \frac{N_T}{(2\pi)^2} \left[\underbrace{\oint \frac{dz}{i} \frac{z^{n-1}(z-1)^2}{(z-z_+)(z-z_-)}}_{A_1} + \underbrace{\oint \frac{dz}{i} \frac{(z-1)^2}{z^{n+1}(z-z_+)(z-z_-)}}_{A_2} \right] \quad (4.74)$$

O integrando de A_1 possui um pólo simples em $z = z_- = \frac{N_<}{N_>}$, logo

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\pi z_-^{n-1} \frac{(z_- - 1)^2}{z_- - z_+} \\ &= 2\pi \left(\frac{N_<}{N_>} \right)^n \frac{N_< - N_>}{N_< + N_>}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Já o integrando de A_2 possui um polo simples em $z = z_-$ e um polo de ordem $n+1$ em $z = 0$, ou seja

$$A_2 = 2\pi \left(\underbrace{\frac{(z_- - 1)^2}{z_-^{n+1}(z_- - z_+)}}_{J_1} + \lim_{z \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[\frac{(z-1)^2}{(z-z_-)(z-z_+)} \right]}_{J_2} \right) \quad (4.76)$$

com

$$J_1 = \left(\frac{N_>}{N_<} \right)^2 \frac{N_< - N_>}{N_< + N_>}, \quad \text{e} \quad J_2 = \frac{(N_< - N_>)^2}{(N_< N_>)^n} \sum_{k=1}^n N_<^{2(n-k)} N_>^{2(k-1)}.$$

Finalmente, usando

$$\sum_{k=1}^n N_<^{2(n-k)} N_>^{2(k-1)} = \left(\frac{N_>}{N_<} \right)^2 \frac{\left(\frac{N_>}{N_<} \right)^{2n} - 1}{\left(\frac{N_>}{N_<} \right)^2 - 1}, \quad (4.77)$$

podemos escrever

$$A_2 = 2\pi \frac{N_< - N_>}{N_< + N_>} \left(\frac{N_<}{N_>} \right)^n. \quad (4.78)$$

Portanto, substituindo (4.75) e (4.78) em (4.74) temos os coeficientes de Fourier na forma compacta

$$a_n = \frac{N_< - N_>}{\pi} \left(\frac{N_<}{N_>} \right)^n. \quad (4.79)$$

Dessa forma, usando (4.70) e (4.79) obtemos a densidade na forma

$$\sigma_0(\theta) = \frac{N_{<}}{\pi} + \frac{N_{<} - N_{>}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{N_{<}}{N_{>}} \right)^n \cos(n\theta). \quad (4.80)$$

A correção quântica na condutância também pode ser expandida numa série de cossenos. Para isso considere as identidades

$$\delta(\theta) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\theta), \quad (4.81)$$

$$\delta(\theta - \pi) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\theta). \quad (4.82)$$

Substituindo (4.82) e (4.81) em (4.67), nos leva a

$$\delta\sigma(\theta) = \frac{2-\beta}{\beta\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \cos[(2n+1)\theta] - \frac{\gamma}{\beta\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\theta). \quad (4.83)$$

juntando (4.80) e (4.83), obtemos a expansão semiclássica para a densidade de níveis

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{N_{<}}{\pi} + \frac{N_{<} - N_{>}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{N_{<}}{N_{>}} \right)^n \cos(n\theta) + \\ &+ \frac{2-\beta}{\beta\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos[(2n-1)\theta] - \frac{\gamma}{\beta\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\theta). \end{aligned} \quad (4.84)$$

4.4.2 Média de uma estatística linear

O valor esperado da estatística linear $F = \sum_{i=1}^N f(x_i)$ é dado por

$$\langle F \rangle = \int_0^{\pi} \tilde{f}(\theta) \sigma(\theta) d\theta, \quad (4.85)$$

onde $\tilde{f}(\theta) = f(1 - (1 - x_c) \cos^2 \theta/2)$. Utilizando (4.84), temos que $\langle F \rangle = F_0 + \delta F$, onde o termo dominante é dado por

$$F_0 = \frac{1}{2} \tilde{f}_0 N_{<} - \frac{N_{>} - N_{<}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{N_{<}}{N_{>}} \right)^n \tilde{f}_n \quad (4.86)$$

onde

$$\tilde{f}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (4.87)$$

são os coeficientes da série de cossenos de Fourier da função $\tilde{f}(\theta)$. Analogamente, a correção de localização fraca é dada por

$$\delta F = \frac{2-\beta}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n-1} - \frac{\gamma}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tilde{f}_n. \quad (4.88)$$

Separando os termos pares e ímpares no segundo somatório, podemos escrever

$$\delta F = \frac{2 + \gamma - \beta}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n-1} - \frac{\gamma}{2\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_{2n}. \quad (4.89)$$

A seguir, ilustraremos o uso de (4.86) e (4.89) para alguns observáveis

1. Condutância

Neste caso, $f(\theta) = 1 - 4\xi \cos^2 \theta/2 = 1 - 2\xi - 2\xi \cos \theta$. Portanto os únicos coeficientes de Fourier não nulos são $\tilde{f}_0 = 1 - 2\xi$ e $\tilde{f}_1 = -2\xi$. Usando o valor de ξ definido na equação (4.66) encontramos

$$g_0 = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \quad (4.90)$$

$$\delta g = \frac{\beta - 2 - \gamma}{\beta} \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2}, \quad (4.91)$$

que coincide com os resultados da seção 4.3.3, como deveria ser.

2. Potência do Ruído de Disparo.

Neste caso

$$\tilde{f}(\theta) = 2\xi(1 - 3\xi) + 2\xi(1 - 4\xi) \cos(\theta) - 2\xi^2 \cos(2\theta), \quad (4.92)$$

portanto os únicos coeficientes de Fourier não nulos nesta série de cossenos são $\tilde{f}_0 = 2\xi(1 - 3\xi)$, $\tilde{f}_1 = 2\xi(1 - 4\xi)$ e $\tilde{f}_2 = -2\xi^2$. O que implica em

$$p_0 = \frac{N_1^2 N_2^2}{(N_1 + N_2)^3}, \quad (4.93)$$

$$\delta p = -\frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^4} \left[(N_1 - N_2)^2 \frac{\beta - 2 - \gamma}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} N_1 N_2 \right]. \quad (4.94)$$

4.5 Médias de somas de potências e Cumulantes da Estatística de Contagem

Somas de potências aparecem naturalmente na definição dos cumulantes da estatística de contagem de carga. Como consequência da fórmula de Levitov-Lesovik[21], podemos escrever para sistemas das classes Wigner-Dyson e BdG

$$q_k = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p p! S(k, p+1) X_{p+1}, \quad (4.95)$$

onde $S(k, p)$ é o número de Stirling de segunda espécie. Vimos no capítulo 3 que cumulantes de q_k envolvem médias do tipo $\langle X_{\lambda_1} \dots X_{\lambda_n} \rangle$ que podem ser obtidas pelo método da equação de

movimento. No entanto, os resultados rapidamente tornam-se proibitivamente grandes para cumulantes à medida em que $|\lambda|$ cresce. Nesta seção, consideraremos o caso $\lambda = (p)$, ou seja, do valor esperado de apenas uma soma de potências. Como neste caso X_p é uma estatística linear, podemos usar as análises das seções anteriores para o cálculo de sua expansão semiclássica.

4.5.1 Média da soma de potências no limite semiclássico

O valor esperado da soma de potências X_p é dado por

$$\langle X_p \rangle = \int_a^b x^p \rho(x) dx. \quad (4.96)$$

Dessa forma, usando a expansão semiclássica da densidade de níveis $\rho(x)$ podemos escrever

$$\langle X_p \rangle = X_{p,0} + \delta X_p. \quad (4.97)$$

Os dois termos da equação (4.97) são convenientemente calculados usando a substituição $x = 1 - 4\xi \cos^2(\theta/2)$ introduzida na seção 4.4. Dessa forma, o termo dominante pode ser escrito como

$$X_{p,0} = \int_0^\pi [1 - 4\xi \cos^2(\theta/2)]^p \sigma_0(\theta) d\theta \quad (4.98)$$

onde $\sigma_0(\theta)$ é dado pela equação (4.64). Dessa forma, a integral a ser calculada é

$$X_{p,0} = \frac{2N_T \xi}{\pi} \int_0^\pi [1 - 4\xi \cos^2(\theta/2)]^{p-1} \sin^2(\theta/2) d\theta. \quad (4.99)$$

Expandindo o binômio $[1 - 4\xi \cos^2(\theta/2)]^{p-1}$, podemos escrever

$$X_{p,0} = \frac{2N_T \xi}{\pi} \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \binom{p-1}{l} 4^l \xi^l \int_0^\pi \sin^2(\theta/2) \cos^{2l}(\theta/2) d\theta. \quad (4.100)$$

A integral pode ser escrita em termos da função beta

$$\int_0^\pi \sin^2(\theta/2) \cos^{2l}(\theta/2) d\theta = B(3/2, l+1/2) = \frac{(2l-1)!!}{2^{l+1}(l+1)!}. \quad (4.101)$$

Dessa forma, temos o resultado

$$X_{p,0} = N_T \xi \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \binom{p-1}{l} 2^l \frac{(2l-1)!!}{(l+1)!} \xi^l, \quad (4.102)$$

ou, usando $(2l-1)!! = (2l)!(2^l l!)^{-1}$,

$$X_{p,0} = N_T \xi \sum_{l=0}^{p-1} (-1)^l \binom{p-1}{l} \frac{(2l)!}{l!(l+1)!} \xi^l. \quad (4.103)$$

Analogamente, a correção quântica é dada por

$$\delta X_p = \int_0^\pi (1 - 4\xi \cos^2(\theta/2))^p \delta\sigma(\theta) d\theta, \quad (4.104)$$

onde $\delta\sigma(\theta)$ é dado por (4.67). Efetuando as integrais nas deltas, podemos escrever

$$\delta X_p = \frac{\beta - 2}{4\beta} [1 - (1 - 4\xi)^p] - \frac{\gamma}{2\beta} + \frac{\gamma}{2\beta\pi} \int_0^\pi (1 - 4\xi \cos^2(\theta/2))^p d\theta. \quad (4.105)$$

A integral restante também pode ser calculada através da expansão do binômio e uso da função beta

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (1 - 4\xi \cos^2(\theta/2))^p d\theta &= \sum_{l=0}^p (-1)^l \binom{p}{l} (4\xi)^l \int_0^\pi \cos^{2l}(\theta/2) d\theta \\ &= \sum_{l=0}^p (-1)^l \binom{p}{l} (4\xi)^l B(1/2, l + 1/2) \\ &= \pi \sum_{l=0}^p (-1)^l \binom{p}{l} \frac{(2l)!}{l!} \xi^l \end{aligned} \quad (4.106)$$

Portanto, podemos escrever

$$\delta X_p = \frac{\beta - 2}{4\beta} [1 - (1 - 4\xi)^p] + \frac{\gamma}{2\beta} \sum_{l=1}^p (-1)^l \binom{p}{l} \frac{(2l)!}{(l!)^2} \xi^l. \quad (4.107)$$

Expandindo o binômio do primeiro termo de (4.107), chegamos a

$$\delta X_p = \sum_{l=1}^p (-1)^l \binom{p}{l} \left[\frac{2 - \beta}{\beta} 4^{l-1} + \frac{\gamma}{2\beta} \frac{(2l)!}{(l!)^2} \right] \xi^l. \quad (4.108)$$

4.5.2 Expansão semiclássica para os $\langle q_k \rangle$

Os resultados (4.100) em (4.108) podem ser usados para o cálculo do termo dominante e de localização fraca na expansão semiclássica da média

$$\langle q_k \rangle = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p p! S(k, p+1) \langle X_{p+1} \rangle = q_{k,0} + \delta q_k. \quad (4.109)$$

Dessa forma, substituindo (4.100) em (4.109), temos o termo dominante

$$q_{k,0} = N_T \xi \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p p! S(k, p+1) \sum_{l=0}^p (-1)^l \binom{p}{l} \frac{(2l)!}{l!(l+1)!} \xi^l. \quad (4.110)$$

O somatório duplo pode ser rearranjado com o auxílio da identidade para os números de Stirling de segunda espécie

$$\sum_{p=0}^{k-1} \sum_{l=0}^p a_{p,l} \xi^l = \sum_{p=0}^{k-1} \left(\sum_{l=p}^{k-1} a_{l,p} \right) \xi^p. \quad (4.111)$$

Desta forma, podemos reescrever (4.110) como

$$\langle q_k \rangle_0 = N_T \xi \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p \frac{(2p)!}{p!(p+1)!} \left[\sum_{l=p}^{k-1} (-1)^l \binom{l}{p} l! S(k, l+1) \right] \xi^p. \quad (4.112)$$

O somatório entre colchetes é eliminado com o auxílio da identidade

$$\sum_{l=p}^{k-1} (-1)^l \binom{l}{p} l! S(k, l+1) = (-1)^{k+1} p! S(k-1, p). \quad (4.113)$$

Desta forma, após fazermos $p \rightarrow p-1$, chegamos na seguinte expressão para o termo dominante

$$q_{k,0} = N_T \sum_{p=1}^k (-1)^{k+p} \frac{(2p-2)!}{p!} S(k-1, p-1) \xi^p, \quad (4.114)$$

que coincide com o resultado obtido por Novaes [61].

Analogamente, a correção localização fraca é dada por

$$\delta q_k = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p p! S(k, p+1) \delta X_{p+1}. \quad (4.115)$$

Substituindo (4.108) em (4.115), a correção de Localização fraca é dada por

$$\delta q_k = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p p! S(k, p+1) \sum_{l=1}^{p+1} (-1)^l \binom{p+1}{l} \left[\frac{2-\beta}{\beta} 4^{l-1} + \frac{\gamma}{2\beta} \frac{(2l)!}{(l!)^2} \right] \xi^l. \quad (4.116)$$

Rearranjando o somatório duplo usando (4.111) podemos reescrever (4.116) como

$$\delta q_k = \sum_{p=1}^k (-1)^p \left[\frac{2-\beta}{\beta} 4^{p-1} + \frac{\gamma}{2\beta} \frac{(2p)!}{(p!)^2} \right] \xi^p \sum_{l=p}^k (-1)^{l-1} (l-1)! \binom{p+1}{l} S(k, l). \quad (4.117)$$

O segundo somatório resulta em $(-1)^{k+1} (p-1)! S(k, p)$, desta forma podemos escrever

$$\delta q_k = \sum_{p=1}^k (-1)^{k+p+1} (p-1)! S(k, p) \left[\frac{2-\beta}{\beta} 4^{p-1} + \frac{\gamma}{2\beta} \frac{(2p)!}{(p!)^2} \right] \xi^p, \quad (4.118)$$

ou ainda, fazendo, $p \rightarrow p+1$,

$$\delta q_k = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^{k+p} p! S(k, p+1) \left[\frac{2-\beta}{\beta} 4^p + \frac{\gamma}{2\beta} \frac{(2p+2)!}{[(p+1)!]^2} \right] \xi^{p+1}. \quad (4.119)$$

As expressões (4.114) e (4.119) constituem o resultado principal deste capítulo. Eles permitem a construção dos dois primeiros termos da expansão semicássica de qualquer cumulante da estatística de contagem de carga. A seguir ilustraremos os resultados dos quatro primeiros cumulantes.

4.5.3 Resultados para a classes WD/BdG

Usando a notação da referência [56], temos que $q_1 = g$, $q_2 = p$, $q_3 = \kappa$ e $q_4 = \zeta$. Abaixo seguem os resultados obtidos.

1. Primeiro cumulante (condutância)

$$g_0 = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} \quad (4.120)$$

$$\delta g = \frac{\beta - 2 - \gamma}{\beta} \frac{N_1 N_2}{(N_1 + N_2)^2} \quad (4.121)$$

2. Segundo cumulante (potência do ruído de disparo)

$$p_0 = \frac{N_1^2 N_2^2}{(N_1 + N_2)^3}, \quad (4.122)$$

$$\delta p = -\frac{\beta - 2}{\beta} \frac{N_1 N_2 (N_1 - N_2)^2}{(N_1 + N_2)^4} + \frac{\gamma}{\beta} \frac{N_1 N_2 (N_1^2 - N_1 N_2 + N_2^2)}{(N_1 + N_2)^4}. \quad (4.123)$$

3. Terceiro cumulante

$$\kappa_0 = -\frac{N_1^2 N_2^2 (N_1 - N_2)^2}{(N_1 + N_2)^5}, \quad (4.124)$$

$$\delta \kappa = \frac{(\beta - 2) N_1 N_2 (N_1 - N_2)^2 (N_1^2 - 6N_1 N_2 + N_2^2)}{\beta (N_1 + N_2)^6} \quad (4.125)$$

$$-\frac{\gamma N_1 N_2 (N_1 - N_2)^2 (N_1^2 - 3N_1 N_2 + N_2^2)}{\beta (N_1 + N_2)^6}. \quad (4.126)$$

4. Quarto cumulante

$$\zeta_0 = \frac{N_1^2 N_2^2 (N_1^4 - 8N_1^3 N_2 + 12N_1^2 N_2^2 - 8N_1 N_2^3 + N_2^4)}{(N_1 + N_2)^7}, \quad (4.127)$$

$$\delta \zeta = -\frac{(\beta - 2) N_1 N_2 (N_1 - N_2)^2 (N_1^4 - 20N_1^3 N_2 + 54N_1^2 N_2^2 - 20N_1 N_2^3 + N_2^4)}{\beta (N_1 + N_2)^8} \quad (4.128)$$

$$+\frac{\gamma N_1 N_2 (N_1^6 - 15N_1^5 N_2 + 51N_1^4 N_2^2 - 76N_1^3 N_2^3 + 51N_1^2 N_2^4 - 15N_1 N_2^5 + N_2^6)}{\beta (N_1 + N_2)^8}. \quad (4.129)$$

Os resultados obtidos até aqui estão em concordância com os resultados da literatura, indicando que esta abordagem é rica e permite um caminho alternativo aos métodos explorados nos primeiros passos da TMA.

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho desenvolvemos uma generalização do método da equação de movimento para o cálculo de médias de somas de potências dos níveis para qualquer ensemble de polinômios ortogonais da TMA. O método fornece resultados gerais que dependem dos coeficientes r_0, r_1, s_0, s_1 e s_2 que definem esses ensembles. Em particular, nos concentramos nos ensembles de Jacobi associados aos ensembles circulares da TMA, usados em problemas de transporte em cavidades balísticas caóticas de dois terminais acopladas com contatos ideais. Neste caso, os coeficientes r_0 e r_1 dependem do número de canais abertos, N_1 e N_2 , e dos índices de simetria β e γ . No método da equação de movimento médias do tipo $\langle X_\lambda \rangle$ para uma dada partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ são reduzidas a solução de sistemas lineares cuja ordem $|\lambda|$ depende do peso da partição e cujos coeficientes dependem da solução de pesos inferiores. Obtemos, dessa forma uma hierarquia de equações que pode ser facilmente implementada em softwares de computação simbólica. No entanto, à medida que o peso das partições aumenta, o tempo de computação aumenta consideravelmente e as soluções ficam extremamente grandes o que as torna inconvenientes. Obtivemos soluções exatas para as partições até as partições de peso $|\lambda| = 8$. Tais soluções puderam ser adaptadas, por uma escolha conveniente dos parâmetros, para o cálculo de observáveis de transporte para cavidades caóticas das classes Wigner-Dyson e BdG.

Com a limitação do cálculo exato para cumulantes de ordem superior, desenvolvemos um método alternativo para o cálculo da média uma soma de potência $\langle X_n \rangle$ no limite semiclássico $N_1, N_2 \gg 1$ a partir da expansão assintótica da densidade de autovalores de transmissão. Usando algumas propriedades dos números de Stirling de segunda espécie, conseguimos escrever expressões fechadas para a média e a correção de localização fraca para todos os cumulantes da estatística de contagem de carga nas classes Wigner-Dyson e BdG.

Uma sequência natural desse trabalho é o estudo da classe quiral que se aplica a sistemas com simetria de subrede. Nossas soluções exatas permitem o cálculo dos quatro primeiros cumulantes da condutância e dos dois primeiros da potência do ruído de disparo nesta classe. Desta forma, a única maneira de estudar cumulantes de ordem superior da estatística de contagem de carga é através do método da expansão semiclássica. Além disso os resultados analíticos podem ser checados através de simulações numéricas dos ensembles de matrizes circulares.

Número de Stirling

A.1 Número de Stirling de primeira espécie

Considere o polinômio gerado pelo produto

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = \prod_{i=0}^{n-1} (x-i) \quad (\text{A.1})$$

vamos denotar o coeficiente do termo x^r (sem o sinal) neste polinômio pelo símbolo $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$, ou seja

$$\prod_{i=0}^{n-1} (x-i) = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^n - \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} + \dots \pm \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Estes números são chamados **Números de Stirling de 1ª espécie** em homenagem à James Stirling (1692-1770).

Algumas propriedades destes coeficientes serão mostradas sem prova, o leitor interessado pode recorrer à referência [54] para mais detalhes.

Propriedades:

1. $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$
2. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$
3. $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$
4. $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$, onde o lado direito da igualdade significa o coeficiente binomial.

Como exemplo considere $n = 4$:

$$\begin{aligned} x(x-1)(x-2)(x-3) &= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} x^4 - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

3. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$

4. $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$

5. $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$, onde o lado direito da igualdade significa o coeficiente binomial.

e também obedecem a uma relação de recorrência,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \tag{A.9}$$

A tabela seguinte pode ser obtida pela relação de recorrência e pelas propriedades citadas:

Números de Stirling de 2ª espécie									
$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Como exemplo considere o elemento $n = 5$ e $k = 3$, ou seja

$$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 25,$$

pela relação de recorrência podemos afirmar que $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 7 + 3 \times 6$, onde $7 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}$ e $6 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\}$, verifique na tabela.

Referências Bibliográficas

- [1] H. van Houten and C. W. J. Beenakker. **Quantum Point Contacts and Coherent Electron Focusing**. *eprint arXiv:cond-mat/0512611*, December 2005.
- [2] C. W. J. Beenakker. **Random-matrix theory of quantum transport**. *Rev. Mod. Phys.*, 69(731), 1997.
- [3] L. S. Levitov and G. B. Lesovik. **Charge distribution in quantum shot noise**. *JETP Lett.*, 58(3):230, (1993).
- [4] Y. V. Nazarov. **Limits of universality in disordered conductors**. *Physical Review Letters*, 73:134–137, July 1994.
- [5] A. M. S. Macêdo. **Scaling theory of phase-coherent metallic conductors**. 66, 07 2002.
- [6] S. Datta. **Electronic transport in mesoscopic systems**. Cambridge University Press, (1995).
- [7] Katine J. A. Westervelt R. M. Berry, M. J. and A. C. Gossard. **Influence of shape on electron transport in ballistic quantum dots**. 50, December 1994.
- [8] Y. Alhassid. **The Statistical Theory of Quantum Dots**. *Rev. Mod. Phys.*, 72(cond-mat/0102268):895–968, (2000).
- [9] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, C. T. Foxon, et al. **Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas**. *Phys. Rev. Lett.*, 60:848–850, (1988).
- [10] D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J. E F Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie, and G. A C Jones. **One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance**. *Journal of Physics Condensed Matter*, 21(8), 3 1988.
- [11] A. M. Chang, H. U. Baranger, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. **Weak Localization in Chaotic versus Nonchaotic Cavities: A Striking Difference in the Line Shape**. *Phys. Rev. Lett.*, 73:2111–2114, Oct 1994.
- [12] P. A. Mello and H. U. Baranger. **Interference phenomena in electronic transport through chaotic cavities: An information-theoretic approach**. *Waves Random Media*, 9(2):105–146, (1999).

- [13] Ailton F. de Macedo-Junior. **Propriedades universais de transporte em pontos quânticos com simetria quiral**. Dissertação de Mestrado, UFPE (2002).
- [14] Landauer, R. **Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction**. *IBM J. Res. Dev.*, 1(3):223–231, jul 1957.
- [15] R. Landauer. **Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices**. *Philosophical Magazine*, 21(172):863–867, (1970).
- [16] M. Büttiker. **Four-Terminal Phase-Coherent Conductance**. *Physical Review Letters*, 57(14):1761–1764, (1986).
- [17] Y. Blanter and M. Büttiker. **Shot noise in mesoscopic conductors**. *Physics Reports*, 336(1-2):1–166, (2000).
- [18] Y. Nazarov and Y. Blanter. **Quantum Transport**. Cambridge University Press, 1st edition, (2009).
- [19] F. Reif. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo :, international student ed. edition, (1965).
- [20] L. S. Levitov, H.-W. Lee, and G. B. Lesovik. **Electron Counting Statistics and Coherent States of Electric Current**. *J. Math. Phys.*, 37:4845, (1996).
- [21] H.-W. Lee, L. S. Levitov, and A. Y. Yakovets. **Universal statistics of transport in disordered conductors**. *Phys. Rev. B*, 51:4079–4083, (1995).
- [22] M. L. Mehta. **Random Matrices**. Academic Press, San Diego, California, 2nd edition, 1991.
- [23] P A Mello. **Averages on the unitary group and applications to the problem of disordered conductors**. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23(18):4061, 1990.
- [24] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. **Brownian-motion ensembles of random matrix theory: A classification scheme and an integral transform method**. *Nuclear Physics B*, 752(3):439–475, (2006).
- [25] D. V. Savin and H.-J. Sommers. **Shot noise in chaotic cavities with an arbitrary number of open channels**. *Phys. Rev. B*, 73:081307, (2006).
- [26] H.-J. Sommers, W. Wieczorek, and D. V. Savin. **Statistics of Conductance and Shot-Noise Power for Chaotic Cavities**. *Acta Physica Polonica A*, 112(4), (2007).
- [27] D. V. Savin, H.-J. Sommers, and W. Wieczorek. **Nonlinear statistics of quantum transport in chaotic cavities**. *Phys. Rev. B*, 77:125332, (2008).
- [28] B. A. Khoruzhenko, D. V. Savin, and H.-J. Sommers. **Systematic approach to statistics of conductance and shot-noise in chaotic cavities**. *Phys. Rev. B*, 80:125301, (2009).

- [29] V. A. Osipov and E. Kanzieper. **Statistics of thermal to shot noise crossover in chaotic cavities.** *Journal of Physics A Mathematical General*, 42:475101, November 2009.
- [30] Pierpaolo Vivo and Edoardo Vivo. **Transmission eigenvalue densities and moments in chaotic cavities from random matrix theory.** *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(12):122004, 2008.
- [31] Jean-Gabriel Luque and Pierpaolo Vivo. **Nonlinear random matrix statistics, symmetric functions and hyperdeterminants.** *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(8):085213, 2010.
- [32] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. **Quantum transport: A unified approach via a multivariate hypergeometric generating function.** *International Journal of Modern Physics B*, 28(26):1450178, 2014.
- [33] Martin R. Zirnbauer. **Riemannian symmetric superspaces and their origin in random matrix theory.** *Journal of Mathematical Physics*, 37(10):4986–5018, 1996.
- [34] A H. J. Sommers B. A. Khoruzhenko, A D. V. Savin. **Systematic approach to statistics of conductance and shot-noise in chaotic cavities.** *Phys. Rev. B*, 80(12), 2009.
- [35] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. **Universal transport properties of asymmetric chiral quantum dots.** *prb*, 77(16):165313, apr 2008.
- [36] C . J. W. Beenakker J. P. Dahlhaus, B. Béri. **Random-matrix theory of thermal conduction in superconducting quantum dots.** *Phys. Rev. B*, 82(2010), 1994.
- [37] F. J. Dyson. **Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I.** *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):140–156, (1962).
- [38] F. J. Dyson. **Statistical theory of the energy levels of complex systems. II.** *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):157–165, (1962).
- [39] F. J. Dyson. **Statistical theory of the energy levels of complex systems. III.** *Journal of Mathematical Physics*, 3(1):166–175, (1962).
- [40] A. M. S. Macêdo. **Quantum dot to disordered wire crossover: A complete solution in all length scales for systems with unitary symmetry.** *Phys. Rev. B*, 61:4453–4456, Feb (2000).
- [41] Lenz, Georg and Haake, Fritz. **Transitions between universality classes of random matrices.** *Phys. Rev. Lett.*, 65:2325–2328, Nov 1990.
- [42] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. **Brownian-motion ensembles: correlation functions of determinantal processes.** *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41, (2008).
- [43] G. W. Gardiner. **Handbook of Stochastic Methods.** Prentice-Hall, 1st edition, (1985).

- [44] T. Tomé. **Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade**. Editora da Universidade de São Paulo, 2001.
- [45] Barry R. James. **Probabilidade: um curso em nível intermediário**. IMPA, 3rd edition, 2011.
- [46] H. Risken. **The Fokker-Planck Equation**. Springer, 2nd edition, (1989).
- [47] P. J. Forrester and T. H. Baker. **The Calogero-Sutherland Model and Generalized Classical Polynomials**. *Communications in Mathematical Physics*, 188:175–216, (1997).
- [48] Ailton F. de Macedo-Junior. **Transporte em Nanoestruturas: Métodos de Movimento Browniano e Teoria de Circuitos**. Tese de Doutorado, UFPE (2006).
- [49] P. A. Mello and H. U. Baranger. **Mesoscopic Transport through Chaotic Cavities: A Random S-Matrix Theory Approach**. *Phys. Rev. Lett.*, 73(142), (1994).
- [50] I. G. Macdonald. **Symmetric Functions and Hall Polynomials**. Oxford University Press Inc., 2nd edition, (1995).
- [51] R. J. Muirhead. **Aspects of Multivariate Statistical Theory**. John Wiley & Sons, Inc, (1982).
- [52] R. Silva and J. P. O. Santos. **Funções Simétricas e Aplicações em Combinatória**, volume 31. SBMAC, (2007).
- [53] Glauber José Ferreira Tomaz da Silva. **Classificação de Ensembles de Movimento Browniano na Teoria de Matrizes Aleatórias**. Dissertação de Mestrado, UFPE (1999).
- [54] Daniel I. A. Cohen. **Basic Techniques of Combinatorial Theory**. 1978.
- [55] L. E. Reichl. **A modern Course in Statistical Physics**. John Wiley & Sons, Inc, 2 edition, (1998).
- [56] Carlos E C Souza and A F Macedo-Junior. **Quantum transport in chaotic ballistic cavity: a Brownian-motion approach**. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(41):415101, 2015.
- [57] A. F. Macedo-Junior C. A. Souza-Filho and A. M. S. Macedo. **A Hypergeometric Generating Function Approach to Charge Counting Statistics in Ballistic Chaotic Cavities**. (preprint).
- [58] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. **Universal transport properties of asymmetric chiral quantum dots**. *Phys. Rev. B*, 77:165313, (2008).
- [59] A. F. Macedo-Junior and A. M. S. Macêdo. **Universal Transport Properties of Quantum Dots With Chiral Symmetry**. *Physical Review B*, 66, (2002).

- [60] Freeman J Dyson. **A class of matrix ensembles.** *Journal of Mathematical Physics*, 13(1):90–97, 1972.
- [61] M. Novaes. **Full counting statistics of chaotic cavities with many open channels.** *Phys. Rev. B*, 75:073304, (2007).
- [62] M. Abramowitz and C. A. Stegun. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.** Dover, (1972).