



# Universidade Federal Rural de Pernambuco

Departamento de Física

*Recife - PE*

Dual visão da energia cinética e as equações de Ginzburg

Landau

José Enrique Hernández Ramírez

José Enrique Hernández Ramírez

## Dual visão da energia cinética e as equações de Ginzburg Landau

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

**Orientador: Antonio Rodrigues de Castro Romaguera**

**UFRPE**

**Recife - PE**

**15 de janeiro de 2018**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE  
Nome da Biblioteca, Recife-PE, Brasil

R173d    Ramírez, José Enrique Hernández  
          Dual visão da energia cinética e as equações de Ginzburg Landau / José  
          Enrique Hernández Ramírez. – 2017.  
          63 f. : il.

          Orientador: Antonio Rodrigues de Castro Romaguera.  
          Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa  
          de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 2017.  
          Inclui referências e anexo(s).

          1. Estados de vórtice excitados 2. Energia livre de Gibbs 3. Estado  
          paramagnético de vórtice I. Romaguera, Antonio Rodrigues de Castro, orient.  
          II. Título

CDD 621

*Fue, es y será, el inagotable amor que siento y te tengo (que de alguna forma misteriosa e inexplicable tú también sientes y me tienes), que va más allá de tu piel, mi piel, tu cuerpo, el mio, tus abrazos, los míos; que pasa esta frontera física conocida extendiéndose al infinito, desafiando todas las reglas y leyes: el que me da vida, fuerzas y aliento y me hace ser quien soy. Porque es de dos y no de uno el amor, nos amaremos por el resto de los tiempos.*

- José Enrique

## Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar a grande mulher que hoje, infelizmente, não está fisicamente ao meu lado, minha mãe, que me deu educação, ensino e amor infinito. Me deu uma família linda da qual estou infinitamente grato por todo o seu apoio incondicional, minhas queridas irmãs e irmão, meus sobrinhos, tio, prima cunhada e cunhados que, embora distantes, não deixaram de apoiar-me e incentivar-me para a conclusão deste trabalho.

Infinitas graças a meu orientador Antônio Rodrigues de Castro Romaguera por sua infinita paciência, apoio e confiança fornecidas. Agradeço a todos os meus professores, que contribuíram muito para a minha formação profissional. Agradeço aos meus amigos da escola, da profissão, especialmente Joel Estrada, Ramón Enrique Ramayo, Amalia del Carmen Rodriguez Pupo, Roberto Rodríguez, Eduardo Padrón. Também agradeço profundamente aos professores Wictor e Pedro Hugo, por seu gesto de apoio em um dos momentos mais difíceis da minha vida.

Agradeço aos professores do Departamento de Física da UFPRE, aos professores do programa de pós-graduação em Física Aplicada, particularmente Aauto Soza, a Ernande Barbosa da Costa; a meu amigo Athenogenes Neto (secretário). Ao amigo David Roberto Avellaneda Bernal. Aos colegas do curso de mestrado. Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Dual visão da energia cinética e as equações de Ginzburg Landau

*José Enrique Hernández Ramírez*

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 31/08/2017 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

\_\_\_\_\_  
Prof. Antonio Rodrigues de Castro Romaguera  
UFRPE

Banca Examinadora:

\_\_\_\_\_  
Prof. Ramón Enrique Ramayo González  
UFRPE

\_\_\_\_\_  
Prof. Adauto José Ferreira de Souza  
UFRPE

A Amada Ramírez Moreno.

A minha filha Evelyn Amanda Hernández Jacas, minhas irmãs Amalia Rodríguez Ramírez, Caridad Gilart Ramírez, Annia Gilart Ramírez, e irmão Mario Rodríguez Ramírez.

A aquela adorável mulher, Sandra Elisa de Figueiredo e sua bela filha Agda, com todo o meu coração.

Ao belo Recife, Pernambuco, a este belo país, sua gente; a todos eles vai dedicado com muito amor este pequeno trabalho.

# Resumo

Nesta dissertação, propomos um método geral para calcular a diferença de energia livre de Gibbs entre os vórtices remanentes no material supercondutor e o estado normal, válido próximo à transição de fase supercondutora para a normal, onde o parâmetro de ordem é pequeno. Esse método é geral, uma vez que se aplica a qualquer configuração de vórtice em qualquer geometria da área de seção transversal. O método aplica-se a cilindros supercondutores muito longos de modo que as linhas de vórtice sejam paralelas entre si e orientadas ao longo de seu eixo principal. Conforme mostrado aqui, o parâmetro de ordem que descreve o estado do vórtices deixados pode ser obtido a partir do bem conhecido problema matemático da representação conforme. Notavelmente, o parâmetro de ordem é apenas uma função analítica com módulo constante no limite de uma seção transversal de geometria dada. Em potências do parâmetro de ordem, obtemos a diferença de energia de Gibbs, o campo magnético local e as correntes dentro do supercondutor. Além disso, também obtemos outras características interessantes, como o campo magnético no centro do núcleo do vórtice, e também a magnetização paramagnética. É bem sabido que, com baixa densidade do vórtice, o campo magnético dentro do núcleo do vórtice é o dobro do valor do campo crítico mais. Para maiores densidades, uma rede de vórtice se cria e o campo magnético dentro do núcleo do vórtice varia de acordo com o parâmetro  $\kappa$  (a relação entre os comprimentos de coerência e penetração) e a densidade do vórtice. Um resultado surpreendente é que, à medida que os vórtices se movem para a fronteira, o campo magnético em seus núcleos, e também a magnetização paramagnética, mudam de acordo com suas posições. A magnetização desaparece quando os vortices atingem a fronteira.

**Palavras-chave:** Estados de Vórtice Excitados ; Energia livre de Gibbs; Estado Paramagnético de Vórtice; Representação Schwarz-Christoffel; Equação de primeira Ordem de Abrikosov.

# Abstract

In this dissertation we propose a general method to calculate the Gibbs free energy difference between the left vortex and the normal states valid near the superconducting to normal transition, where the order parameter is small. This method is general since it applies to any vortex configuration in any geometry of the cross section area. The method applies to very long superconducting cylinders such that the vortex lines are parallel to each other and oriented along its major axis. As shown here, the order parameter that describes the left vortex state can be obtained from the well-known mathematical problem of conformal mapping. Remarkably the order parameter is just an analytical function with constant modulus at the boundary of a given cross section geometry. In power of the order parameter we obtain the Gibbs energy difference, the local magnetic field and currents inside the superconductor. Besides we also obtain other interesting features, such as the magnetic field at the center of the vortex core, and also the paramagnetic magnetization. It is well-known that at low vortex density the magnetic field inside the vortex core is twice the value of the lowest critical field. For higher densities a vortex lattice sets in and the magnetic field inside the vortex core varies according to the parameter  $\kappa$  (the ratio between the penetration and the coherence lengths) and the vortex density. Here we report the surprising result that as vortices move towards the boundary the magnetic field at their cores, and also the paramagnetic magnetization, change according to their positions. The magnetization vanishes when vortices reach the boundary.

**Keywords:** Excitator Vortex State; Gibbs Free Energy; Paramagnetic Vortex State; Schwarz-Christoffel Mapping; Abrikosov First Order Equation.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorias fenomenológicas</b>	<b>9</b>
2.1	Equação de London . . . . .	9
2.2	Equação de Ginzburg-Landau . . . . .	12
2.2.1	Comprimentos característicos . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Equação de Primeira Ordem</b>	<b>18</b>
3.1	A energia livre de Gibbs de um supercondutor longo e as equações variacionais de segunda ordem . . . . .	19
3.2	Dupla visão da energia cinética e as equações de primeira ordem . . . . .	20
3.3	As condições de contorno, a magnetização e a energia livre de Gibbs . . . . .	24
3.4	Unidades adimensionais . . . . .	26
3.5	Estado de vórtice excitado e a representação conforme . . . . .	28
3.6	Cilindro longo com uma seção transversal circular . . . . .	31
3.6.1	Vorticidade $L$ no centro . . . . .	31
3.6.2	Vorticidade $L = 1$ em qualquer posição . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Conclucões</b>	<b>44</b>
<b>A</b>	<b>Anexos</b>	<b>45</b>
A.1	Anexo I . . . . .	45



# Lista de Figuras

1.1	Resistividade do Mercúrio com a temperatura . . . . .	2
1.2	Efeito Meissner . . . . .	3
2.1	Campo magnético no interior de um supercondutor . . . . .	12
2.2	Funcional da energia livre de Gibbs . . . . .	15
2.3	Comprimento característicos . . . . .	17
3.1	Densidade supercondutora em função da distância . . . . .	33
3.2	Campo magnético local em função da distância . . . . .	35
3.3	Diferença de energia livre de Gibbs entre os estados supercondutores . . . . .	36
3.4	Diferença de energia livre de Gibbs entre os estados supercondutores e os estados normais . . . . .	40
3.5	Campo magnético no centro do vórtice como função da posição . . . . .	41
3.6	Magnetização como função da posição do vórtice . . . . .	42
3.7	Densidade supercondutora, campo magnético local, densidade da corrente elétrica e fase do parâmetro de ordem . . . . .	43

# Capítulo 1

## Introdução

O dia 10 de Julho de 1908 o físico holandês **Heike Kamerlingh Onnes**, no seu laboratório em Leiden, conseguiu liquefazer o Hélio após de uma corrida (cohecida como corrida ao zero absoluto) entre ele e **Sir Jame Dewar**, alcançando a temperatura de 4,20 K. Onnes interessou-se por saber o que poderia acontecer com os elétrons de um metal ao ser esfriado cada vez mais. Uma das possibilidades era que estes elétrons se congelassem, em cujo caso a resistividade deveria aumentar. Em 1911, três anos depois, o proprio Onnes e seus estudantes, Gilles Holst e Master G. J. Flim (técnico encarregado) durante investigações sobre o comportamento da resistividade de materiais em baixas temperaturas[1], mediram a resistência de um capilar de Mercúrio puro, diminuindo sua temperatura, observando que quando esta atingia os 4.2 K, sua resistividade era praticamente nula abaixo de uma certa temperatura denominada temperatura crítica ( $T_c$ ) enquanto a corrente fluía livremente pelo material. Esse resultado foi apresentado por Onnes em um artigo publicado em uma revista científica holandesa em Maio de 1911. Foi descoberto, assim, no mesmo laboratório da universidade de Leiden, o estado *superconductor*. Os materiais com essa propriedade são chamados *supercondutores*. A Figura 1.1 mostra a resistência elétrica da amostra de Mercúrio caindo abruptamente a níveis próximos de zero quando a temperatura chegava ao marco de 4.2 K.

Este comportamento do Mercúrio foi interpretado como resultante de uma transição de fase de um estado metálico, com comportamento resistivo normal, para um estado superconductor,

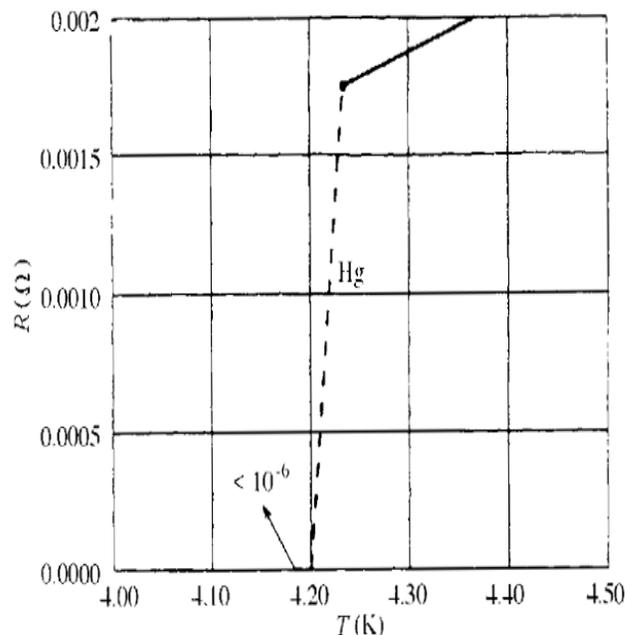
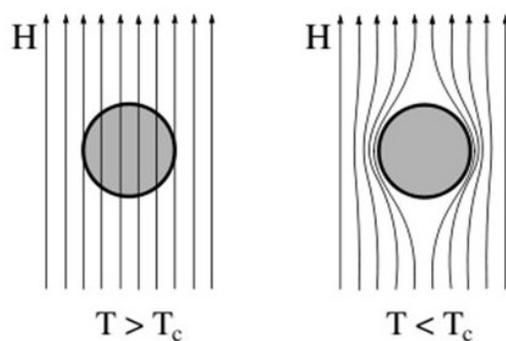


Figura 1.1: Dependência da resistividade do Mercúrio com a temperatura encontrada por H.K. Onnes em 1911[2].

com resistência elétrica nula. Por seus esforços em 1913, Onnes, recebeu o prêmio Nobel de Física por este trabalho e pela liquefação do Hélio. Foi a universidade de Leiden pelos 15 anos consecutivos o único local do mundo onde Hélio líquido era fabricado.

Outros materiais como o estanho e chumbo, assim como suas ligas, mostram resultados similares ao Mercúrio. Em 1914 Onnes mostrou[3] que é possível estabelecer uma corrente permanente num anel de chumbo no estado supercondutor. Mostrou-se assim, neste experimento, que a resistividade dos supercondutores diminui praticamente a zero porque não há dissipação da corrente. Hoje é sabido que a corrente num anel supercondutor poderia se manter sem mudanças durante  $10^{10^{10}}$  anos[4].

Em 1933, Walther Meissner e Robert Ochsenfeld realizaram um experimento que media o fluxo magnético ao redor de amostras em diferentes temperaturas. Para materiais supercondutores, eles observaram que, abaixo da temperatura crítica, praticamente todo o fluxo magnético da amostra era expulso (Figura 1.2). A *supercondutividade* e a *condutividade perfeita* não são o mesmo fenômeno. Um supercondutor não só impede a penetração de um campo magnético externo, como também expulsa qualquer campo previamente estabelecido



Efeito Meissner - Oschenfeld (1933)

Figura 1.2: Um campo magnético constante em uma amostra inicialmente normal é expelido quando ele é esfriada abaixo de  $T_c$ .

no estado normal. Esta propriedade dos supercondutores os diferencia de um condutor perfeito (aquele com resistividade nula no qual é uma idealização em eletromagnetismo clássico). Supercondutores que apresentam um completo efeito Meissner são ditos do tipo I, eles são, além de condutores perfeitos, também diamagnéticos perfeitos.

Em 1935, os irmãos Fritz e Heinz London [5] desenvolveram a primeira teoria fenomenológica para explicar as propriedades dos materiais supercondutores observadas experimentalmente. Eles propuseram uma teoria que explicasse as duas principais propriedades dos supercondutores do tipo-I: o efeito Meissner e a ausência de resistência elétrica. A derivação do modelo proposto pelos irmãos London se baseava no modelo de Drude-Lorentz[6] para descrição do movimento dos elétrons em um metal. A teoria de London tornou possível prever o comportamento da indução magnética, e das correntes dentro do supercondutor. Assim, foi mostrado que o campo magnético decai a uma distância característica conhecida como comprimento de penetração de London  $\lambda$ , que descreve a espessura de penetração do campo magnético aplicado paralelamente à superfície do supercondutor. Embora a teoria conseguisse descrever

o fenômeno a mesma não era capaz de explicá-lo microscopicamente.

Em 1950, uma nova teoria fenomenológica é proposta por Vitaly Ginzburg e Lev Landau (**GL**) [7], a chamada teoria de Ginzburg-Landau (**TGL**), a qual nasceu a partir da teoria geral de Landau com respeito as transições de fase de segunda ordem. Utilizando a idéia da existência de um parâmetro de ordem supercondutor  $\psi(\mathbf{r})$  e do potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , a **TGL** conseguiu apontar a existência não só do comprimento de penetração  $\lambda$ , como também do comprimento de coerência  $\xi$ , relacionado à variação espacial de  $\psi(\mathbf{r})$ . Por sua natureza complexa, o parâmetro de ordem não possuía significado físico, no entanto, sua norma ao quadrado representa a densidade de elétrons supercondutores. A **TGL** possibilitou, através do parâmetro de **GL**,  $\kappa = \lambda/\xi$ , a descrição de dois tipos existentes de supercondutores: tipo I ( $\kappa < 1/2$ ) e tipo II ( $\kappa > 1/2$ ). Podemos mostrar que para  $\kappa \rightarrow \infty$  a *TGL* recupera a Teoria de London.

O efeito isotópico, descoberto em 1950 por dois grupos de pesquisa independentes[8], fornecia dados que confirmavam a participação do fônon no mecanismo da supercondutividade, pois constatou-se a variação de  $T_c$  com a massa isotópica de supercondutores elementares. Por exemplo, ao se aumentar a massa atômica do Mercúrio de 199,5 para 203,4 u.m.a a temperatura crítica varia de 4,185 K a 4,146 K.

Em 1953 Lars Onsager, mediu o fluxo magnético que passava através de um anel supercondutor e achou que o fluxo era a metade do valor esperado, observou que o valor mínimo era coerente com um valor de duas vezes a carga do elétron ( $\phi_0 = hc/2e$ ).

Utilizando a teoria de **GL**, Alexei A. Abrikosov em 1956, mostrou que existe uma segunda classe de supercondutores denominados supercondutores do tipo II. Demonstrou que neste tipo de supercondutor o fluxo magnético penetra dentro do material em forma de vórtices, isto é, pacotes de fluxo magnético quantizados, formando uma rede triangular em um supercondutor homogêneo[9].

Baseado na ideia de Lars Onsager[10], Leon Cooper percebeu que, a baixas temperaturas (no estado supercondutor), as vibrações da rede cristalina forçavam a os elétrons a se emparelharem. Este emparelhamento forçado lhes permite superar os obstáculos responsáveis pela resistência elétrica em um condutor. O acoplamento de elétrons no estado supercondutor é vantajoso, porque é um estado de energia mais baixo, em que os pares são movimentados de

uma maneira ordenada, a diferença do que acontece com os elétrons individuais.

Em 1957, Bardeen, Cooper e Schieffer propõem uma teoria microscópica para a supercondutividade, conhecida como teoria **BCS**, onde é assumida a formação de pares de elétrons (chamados *pares de Cooper*) ligados que carregam a supercorrente e a existência de um gap de energia entre os estados normal e supercondutor. Os resultados da teoria de Ginzburg e Landau são bem descritos dentro no formalismo da teoria **BCS**[11].

É importante ressaltar que foi o alemão Herbert Fröhlich[12] o primeiro a sugerir a atração entre elétrons via fônons e que essa atração produzia um gap[13] (banda proibida) de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado.

Em 1962 com base na teoria **BCS**, o físico inglês Brian D. Josephson supôs que a junção de dois materiais supercondutores apresenta propriedades particulares (previu que poderia haver uma corrente eléctrica entre eles, mesmo que haja uma pequena separação entre os dois, devido ao efecto tunel), o que foi comprovado posteriormente por Anderson e Rowell experimentalmente. Esse efeito ficou conhecido como **Efeito Josephson**[14]. Por essa descoberta Josephson ganhou o Prêmio Nobel de Física em 1973.

No momento em que a maioria dos físicos tinha abandonado a idéia de encontrar um supercondutor de alta temperatura, os físicos J. G. Bednorz e K. A. Müller[15], em 1986, deram um grande salto.

Até antes de 1986 a temperatura crítica mais alta conhecida para um supercondutor era a do composto  $Nb_3Ge$ , para o qual  $T_c = 23,2$  K, e a teoria **BCS** previa que  $T_c$  poderia subir no máximo um ou dois graus. Contudo, baseando-se nesta teoria, foi estabelecido, no início da década dos 70, que a  $T_c$  não devia exceder os 30 K. Foi depois de uma década que J.G. Bednorz e K.A. Muller, trabalhando no IBM Research Laboratory de Zurique (Suíça), encontraram um supercondutor de alta temperatura crítica com  $T_c = 30$  K. O novo material era uma cerâmica ( $La_2CuO_4$ ). Bednorz e Muller receberam o Prêmio Nobel em 1987, tornando-se o Nobel mais rápido da história.

Em 1987 C.W. Chu e colaboradores descobriram , uma nova cerâmica supercondutora de fórmula  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  com uma temperatura crítica superior à temperatura de ebulição do nitrogênio líquido[16]. A teoria **BCS** não consegue explicar totalmente as altas temperaturas

críticas observadas nestos tipos de compostos.

O período desde 1930 até 1986 foi nomeado *Era do supercondutor de Nióbio*, porque a presença do **Nb** e seus compostos dominaram as altas  $T_c$ . O novo período que teve início em 1986 foi chamado *Era do Óxido de cobre* porque a presença de cobre e de oxigênio exceto em poucas exceções, foi fundamental para se obter  $T_c$  maiores de 40 K.

Os materiais supercondutores podem ser classificados de diversas formas ou critérios, os mais comuns são:

- Por suas propriedades físicas: podem ser do Tipo I (se sua transição de fase for de primeira ordem) ou do Tipo II (se sua transição de fase for de segunda ordem).
- Pela Teoria que o explica: podem ser convencionais (se podem ser explicados pela Teoria BCS) ou não convencionais caso contrário.
- Pela sua temperatura crítica: podem ser de alta-temperatura (geralmente se atingem o estado supercondutor quando resfriados com nitrogênio líquido,  $T_c > 77$  K), ou podem ser de baixa-temperatura (geralmente quando necessitam de temperaturas mais baixas que 77 K para atingir o estado supercondutor).
- Pelo material: podem ser elementos químicos (como o Mercúrio e o chumbo), ligas (como a titânio-nióbio ou germânio-nióbio), cerâmicas (como o YBCO ou o diboreto de magnésio), ou mesmo supercondutores orgânicos como fulerenos e nanotubos de carbono.

O tópico anterior mostra que não existe apenas uma forma de classificar os supercondutores. A perda da resistividade elétrica de um material tem diversas aplicações tecnológicas interessantes, como por exemplo a possibilidade de conduzir eletricidade por longas distâncias sem perda de energia por meio do efeito Joule. Também podemos citar aplicações medicinais importantes, como a ressonância nuclear magnética e a construção de dispositivos eletrônicos conhecidos como **SQUID** (Dispositivo Supercondutor de Interferência Quântica), usados para medir campos magnéticos extremamente baixos, como os produzidos pelo coração e o cérebro. Os materiais supercondutores apresentam essa propriedade, pelo qual justifica-se

o interesse no estudo teórico das características dos supercondutores tipo II. Do ponto de vista prático, eles tem temperaturas críticas mais elevadas, o que significa processos mais baratos para obtê-las, tornando viável sua exploração comercial. O nitrogênio, por exemplo, se liquefaz a 77 K, sendo muito mais barato e mais fácil de obter do que o Hélio líquido.

Nos supercondutores do tipo II existe, na presença de um campo magnético, uma região na qual o campo penetra gradualmente ao interior do mesmo na forma de linhas de fluxo magnético chamados (*vórtices*). Essas regiões são chamadas normais (nela o material apresenta uma fase chamada **fase normal**). Outras partes do material não deixam que o campo penetre, e são chamadas regiões supercondutoras (e a fase correspondente, **fase supercondutora**). No material há uma coexistência de fases normais e supercondutoras na qual chamou-se *estado misto*. O movimento dos vórtices é capaz de destruir a supercondutividade.

Por isso tem sido muito intenso nos últimos anos o estudo da **dinâmica de vórtices** em materiais supercondutores do tipo II, tendo em vista suas aplicações práticas.

Os vórtices individuais, em supercondutores tipo II, foram vistos pela primeira vez por U. Essmann e H. Träuble através da técnica de decoração **Bitter**[17]. Neste trabalho propomos um método geral para calcular a diferença de energia livre de Gibbs entre o estado de vórtice e o estado normal válido perto da transição supercondutora normal, onde o parâmetro de ordem é pequeno. Este método é geral porque se aplica a qualquer configuração de vórtice em qualquer geometria da área da seção transversal. O parâmetro de ordem que descreve o estado dos vórtices pode ser obtido a partir do representação conforme. A diferença de energia de Gibbs é obtido em potência do parâmetro de ordem, o campo magnético local e as correntes dentro do supercondutor. Além disso, também obtemos outras características interessantes, como o campo magnético no centro do núcleo do vórtice, e também a magnetização paramagnética.

A presente dissertação está organizada da seguinte maneira:

- No **Capítulo 2** apresentamos a teoria de London primeiramente e a teoria de Ginzburg-Landau depois, como as duas principais teorias fenomenológicas da supercondutividade.

- No **Capítulo 3** introduzimos o elemento-chave para nossa abordagem, que é a decomposição da energia cinética em uma soma de três termos, a saber, a condição do estado base, a interação magnética e o termo de fronteira. Esta decomposição está diretamente relacionada com as equações de primeira ordem, discutimos o papel desempenhado pelas condições de fronteira no contexto das equações de primeira ordem e obtemos expressões para a magnetização e a energia livre de Gibbs.
- No **Capítulo 4** Nesta seção chegamos as conclusões e os detalhes do método usado no trabalho são dados.

# Capítulo 2

## Teorias fenomenológicas

### 2.1 Equação de London

Os irmãos London propuseram uma teoria fenomenológica para explicar as duas principais propriedades dos materiais supercondutores do tipo I obtidas experimentalmente: o efeito Meissner e a ausência de resistência elétrica. Eles apresentaram duas derivações, uma delas se baseia no modelo de Drude-Lorentz[2]. A segunda derivação se baseia no modelo de dois fluidos, o qual supõe que para  $T < T_c$ , todos os elétrons livres no material supercondutor podem ser divididos em dois grupos: uma fração dos elétrons comporta-se de forma normal, enquanto que os elétrons restantes exibem um comportamento anômalo, os quais são responsáveis pelas propriedades supercondutoras.

O modelo de Drude-Lorentz é equivalente a segunda lei de Newton para a velocidade  $v$  de um elétron de massa  $m$  e carga  $e$  na presença de um campo elétrico  $\mathbf{E}$  com um deslocamento viscoso proporcional a  $\mathbf{v}\tau$ , a qual pode ser escrita como[4]:

$$m \left( \dot{\mathbf{v}} + \frac{\mathbf{v}}{\tau} \right) = e\mathbf{E} \quad (2.1)$$

No caso de um condutor perfeito  $\tau \rightarrow \infty$ , e  $\mathbf{v}\tau \rightarrow 0$ , por isso tendo em conta que  $\mathbf{j} = nev$  é a densidade de corrente,  $n$  é a densidade de electrons condutores, a equação 2.1 pode se

rescrever como:

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E} \quad (2.2)$$

Esta equação é conhecida na literatura como primeira equação de London. Aplicando o rotacional na equação 2.2 e tendo em conta a segunda lei de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad (2.3)$$

obtemos:

$$\nabla \times \left( \frac{d\mathbf{j}}{dt} \right) = -\frac{ne^2}{mc} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad (2.4)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \times \mathbf{j} + \frac{ne^2}{mc} \mathbf{h} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Esta notação tem como objetivo o fato de que a indução magnética varia com a posição no interior do material supercondutor.

Considerando agora a lei de Ampere  $\nabla \times \mathbf{h} = 4\pi/c\mathbf{j}$ , podemos reescrever a equação 2.5 como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \frac{4\pi ne^2}{mc^2} \mathbf{h} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Dado que divergencia de  $\mathbf{h}$  é nula pela lei de Gauss do magnetismo, a equação 2.6 é simplificada como:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \frac{4\pi ne^2}{mc^2} \mathbf{h} = 0 \quad (2.7)$$

Introduzindo o comprimento de London,  $\lambda_L$ , definido por:

$$\lambda_L = \left( \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.8)$$

a equação 2.7 fica como:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{h} = 0. \quad (2.9)$$

Empiricamente este comprimento de penetração tem a seguinte dependência com a temperatura:

$$\lambda(T) = \lambda(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

A equação 2.9 descreve o caráter diamagnético perfeito de um supercondutor e pode ser resolvida unidimensionalmente. Para este efeito, consideramos a superfície de um supercondutor muito grande, localizado na coordenada  $x = 0$  e infinitamente estendido ao longo do plano  $(X, Z)$ . O supercondutor ocupa a metade do espaço  $x > 0$  e está imerso em um campo magnético paralelo à sua superfície, de modo que  $\mathbf{h} = (0, 0, h_z(x))$  (veja Figura 2.1). A solução de 2.9 é:

$$h(x) = h(0)e^{-\frac{x}{\lambda_L}}. \quad (2.11)$$

No interior do supercondutor, o campo magnético é reduzido por um fator  $1/e$  quando está a uma distância  $\lambda_L$ , diminuindo assintoticamente a zero no limite  $x \rightarrow \infty$ . Apenas alguns nanômetros de distância de sua superfície, o semi-espaço do supercondutor está livre praticamente do campo magnético e exhibe o estado diamagnético perfeito. Para o estanho, por exemplo, uma estimativa do comprimento de penetração é  $\lambda_L = 26$  nm. Este valor se desvia apenas um pouco do valor medido, que cai em baixas temperaturas na faixa de 25–36 nm[18]. Para amostras com espessura da ordem ou menores do que  $\lambda_L$ , o fenômeno da supercondutividade é muito diferente, uma vez que o campo magnético não chega a se anular na espessura do condutor. Caso a intensidade do campo magnético seja aumentada acima de um determinado valor, o fenômeno da supercondutividade pode ser destruído. Esse fato já tinha sido observado por Onnes, que também já tinha verificado que elevando continuamente a densidade de corrente, era possível destruir a supercondutividade. Assim, três parâmetros críticos foram identificados: temperatura ( $T_c$ ), campo magnético ( $H_c$ ) e densidade de corrente ( $j_c$ ).

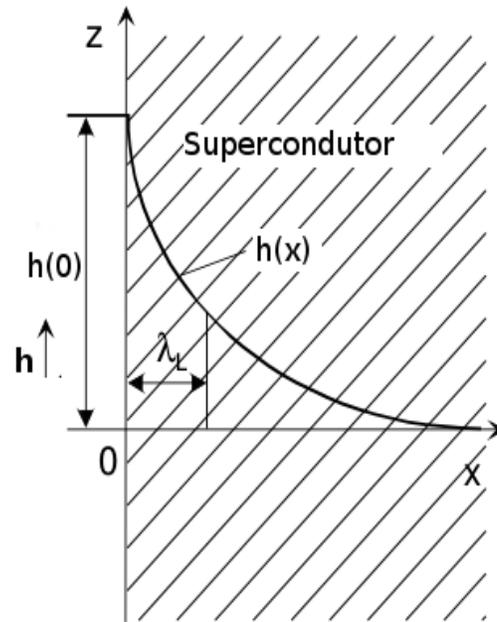


Figura 2.1: Diminuição do campo magnético no interior de um supercondutor perto da superfície plana. Efeito Meissner.

Embora a teoria de London seja uma ferramenta útil para descrever o comportamento do supercondutor e o estado de vórtices em supercondutores extremos do tipo II ( $k \rightarrow \infty$ ), trata os vórtices como linhas, sem considerar seu tamanho físico nem sua estrutura interna. Além disso, a teoria de London descreve a supercondutividade a campo constante e muito menor que o campo crítico superior da amostra. Também não pode ser aplicada a sistemas em que a densidade de vórtices é alta. Para poder analisar o estado supercondutor em casos mais gerais, é necessário a construção de uma teoria que permita estudar a estrutura interna do vórtice.

## 2.2 Equação de Ginzburg-Landau

A teoria de **London** foi um passo muito importante na compreensão da supercondutividade, mas ela tem a hipótese de que a densidade de elétrons é constante no espaço. Dessa forma a teoria não permite o cálculo correcto da tensão superficial entre um metal normal e um

supercondutor e não permite descrever corretamente a destruição da supercondutividade por um campo magnético ou uma corrente.

A Teoria de **GL** da supercondutividade descreve a energia livre de transição do estado supercondutor ao estado normal através do parâmetro de ordem,  $\psi(\mathbf{r})$ , e tem como base conceitos termodinâmicos como *fenômenos críticos* e *transições de fase*.

O estado de equilíbrio de um corpo homogêneo é determinado pela especificação de duas quantidades termodinâmicas quaisquer, por exemplo, o volume  $V$  e a energia interna  $U$ . No entanto, não todo par de valores de  $V$  e  $U$  no equilíbrio corresponde a um *estado uniforme* do corpo. Pode acontecer que para certos valores dessas variáveis o corpo não seja homogêneo em equilíbrio térmico, mas exista em duas partes uniformes em contato uns com os outros e em estados diferentes. Tais estados de uma substância que podem existir simultaneamente em equilíbrio uns com os outros, enquanto eles estão em contato, são chamadas *fases* [19]. Em cada fase certas propriedades macroscópicas podem mostrar valores muito diferentes. Um exemplo do anteriormente dito é um material supercondutor tipo II na presença de um campo magnético. Nele existem duas regiões uma normal na outra supercondutora em contato a mesma temperatura. Durante uma transição de fase de determinado meio, certas propriedades do meio mudam, muitas vezes de modo descontínuo, como resultado da alteração de alguma condição externa, tal como temperatura, pressão ou outras.

Os fenômenos críticos são observados há mais de cem anos, e são assim denominados por ocorrerem próximos a um *ponto crítico* que, por sua vez, pode ser entendido como o ponto do diagrama de fase de um sistema onde a transição de fase é de segunda ordem. Nas suas proximidades, diferentes sistemas comportam-se de modo semelhante, obedecendo a lei de potências cujos expoentes não são inteiros, os denominados *expoentes críticos*.

No estado normal, acima da temperatura crítica do supercondutor,  $\psi(\mathbf{r})$  é zero, enquanto que no estado supercondutor, abaixo da temperatura crítica,  $\psi(\mathbf{r})$  é diferente de zero, o seja:

$$\psi = \begin{cases} 0, & \text{se } T > T_c, \\ \neq 0, & \text{se } T < T_c. \end{cases} \quad (2.12)$$

O fenômeno da supercondutividade trata-se de um fenômeno quântico macroscópico. Para

levar em conta os efeitos de origem quântica, o parâmetro de ordem tem que ser complexo  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\theta(\mathbf{r})}$ , sendo  $|\psi(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r})$  a densidade de pares de Cooper. Desse modo,  $\psi(\mathbf{r})$  pode ser interpretado como uma pseudo-função de onda dos portadores de carga do supercondutor. Os trabalhos de Gorkov[20] ajudaram a interpretação desta pseudo função de onda quântica que descreve o centro de massa dos super-elétrons num supercondutor. Como todos os pares de Cooper condensam no mesmo estado, de dimensão macroscópica, uma única função de onda é suficiente para descrevê-los em conjunto.

A teoria de **GL** considera que próximo a transição de fase  $\psi(\mathbf{r})$  é **pequeno** e varia suavemente no espaço. Dessa forma, a **energia livre** de Gibbs num campo magnético aplicado pode ser **expandida** em potencias de  $|\psi|^2$  e do potencial vetor  $\mathbf{A}$  como:

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{2e^*}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{(h - \mathbf{H})^2}{8\pi}. \quad (2.13)$$

Os coeficientes da expansão  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros fenomenológicos **funções regulares** da temperatura  $T$ . Assumimos que  $\beta$  deve ser positivo, pois caso contrario, a densidade de energia livre só apresentaria mínimo global quando  $\psi = \infty$ , o que dificultaria a teoria.  $\mathcal{G}_s$  é a densidade de energia livre do estado supercondutor,  $\mathcal{G}_n$ , do estado normal,  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  é o potencial vetor,  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ , o campo magnético externo aplicado,  $\vec{h} = \nabla \times \mathbf{A}$  o campo local e  $m^*$  e  $e^*$  são a massa e a carga dos pares de Cooper.

Em um sistema onde não exista campo magnético aplicado e não há variação do parâmetro de ordem, podemos obter as grandezas que caracterizam o estado supercondutor. Neste caso a equação 2.13 fica como:

$$\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4. \quad (2.14)$$

A equação 2.14 pode ser interpretada como a expansão da densidade de energia livre em potências de  $|\psi|^2$  para um supercondutor homogêneo próximo da temperatura crítica e na ausência de campo magnético,  $T \sim T_c$  ( $\mathbf{H} = 0$ ). A densidade de pares de Cooper ( $|\psi|^2$ ) pode ser achada da equação 2.14 minimizando a energia livre a temperatura  $T_c$ .

Mostremos, primeiramente, qual é o significado físico dos parâmetros fenomenológicos  $\alpha$  e  $\beta$ .  $\alpha$  pode ser positivo ou negativo. Se for positivo o único mínimo da energia ocorre em

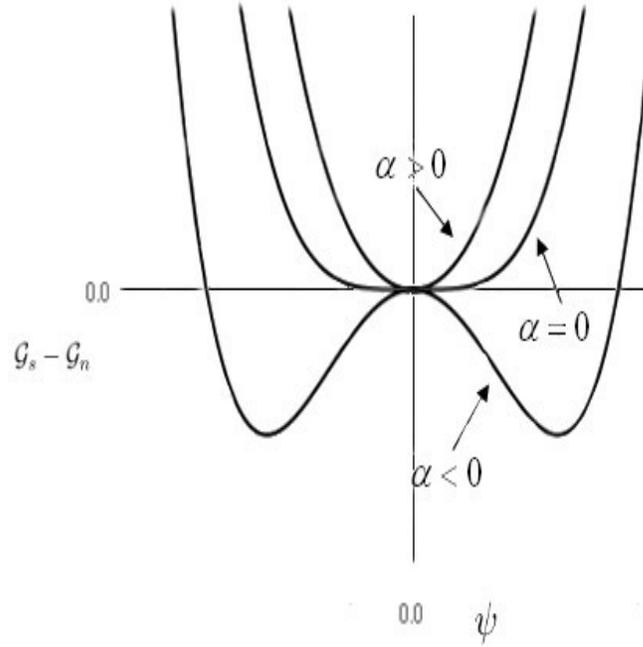


Figura 2.2: Comportamento do funcional da energia livre 2.14 ao variar o valor de  $\psi$  para o caso sem campo magnético e considerando que  $\psi$  varia suavemente no espaço para  $\alpha > 0$ ,  $\alpha = 0$  e  $\alpha < 0$ .

$\psi = 0$  (o material está no estado normal). Se  $\alpha < 0$  o mínimo ocorre em  $|\psi|^2 = -\alpha/\beta$ , no qual é o valor que o parâmetro de ordem toma em um supercondutor infinito na ausência de campos e gradientes (veja Fig. 2.2). O coeficiente  $\alpha(T)$  é negativo para  $T < T_c$  e positivo no caso contrário.

Para ter em conta este fato, fazemos a expansão em série de Taylor até primeira ordem de  $\alpha(T)$ , o seja,  $\alpha(T) \approx (T - T_0) \alpha_0$ , sendo  $\alpha_0$  uma constante positiva.  $\beta(T) \approx \beta_0$ , sendo  $\beta_0$  uma constante positiva que é característico do material. Quando  $T < T_c$  a energia livre tem um mínimo absoluto para  $|\psi|^2 = -\alpha/\beta$ , o seja,  $\psi \neq 0$ . No caso em que  $T > T_c$  então  $|\psi| = 0$ .

$$|\psi|^2 = \begin{cases} 0, & \text{se } T > T_c, \text{ e,} \\ \frac{\alpha_0}{\beta_0} (T_c - T), & \text{se } T < T_c. \end{cases} \quad (2.15)$$

Quando  $T > T_c$ , o material assume o estado normal e quando  $T < T_c$ , o material opta por assumir o estado supercondutor. Neste último estado a diferença de energia livre entre o estado normal e supercondutores possui dois mínimos localizados em  $\psi = \pm \sqrt{-\alpha/\beta}$ , cujo

valor é dado por:

$$\mathcal{G}_s - \mathcal{G}_n = -\frac{\alpha^2}{\beta}. \quad (2.16)$$

Se a funcional da energia livre 2.13 é integrada e minimizada com relação ao parâmetro de ordem  $\psi^*$  e ao potencial vetor  $\mathbf{A}$  é possível achar as equações de **Ginzburg-Landau**:

$$\alpha|\psi| + \beta\psi|\psi|^2 + \frac{\vec{D}^2\psi}{2m^*} = 0, \quad e \quad (2.17)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.18)$$

Onde a densidade de corrente é dada por:

$$\mathbf{j} = \frac{q^*}{2m^*} \left( \psi^* \vec{D}\psi + \psi \vec{D}^* \psi^* \right) - \frac{4e^2}{mc} |\psi|^2 \mathbf{A}. \quad (2.19)$$

Aquí  $q^* = 2e$  e  $m^* = 2m_e$  são a carga e a massa dos portadores da supercorrente.

Na seção **3.1** do capítulo **3** adicionaremos as condições de fronteira as quais permitem achar as soluções físicas possíveis.

### 2.2.1 Comprimentos característicos

A teoria de **GL** introduz dois importantes comprimentos característicos: o comprimento de penetração  $\lambda(T)$  e o comprimento de coerência  $\xi(T)$ . O comprimento de penetração indica o comprimento sobre o qual o campo magnético  $\mathbf{H}$  pode variar e o segundo indica o comprimento sobre o qual o parâmetro de ordem pode variar (ver Figura 2.3).

O parâmetro adimensional  $\kappa$ , específico de cada material, chamado *parâmetro* de **GL**, e definido como:

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)},$$

descreve a relação entre a penetração do fluxo em um supercondutor e a coerência da sua supercondutividade. Como  $\lambda(T)$  e  $\xi(T)$  divergem basicamente na mesma forma em  $T = T_c$ ,

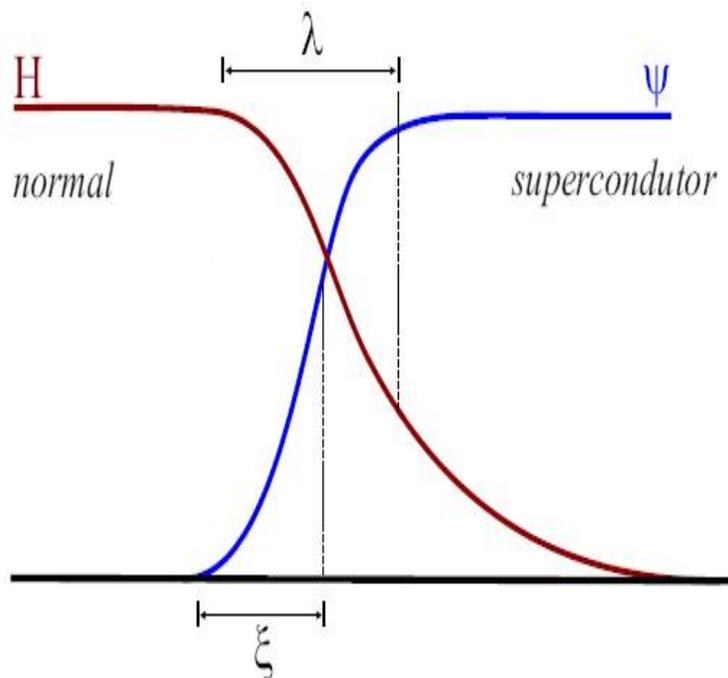


Figura 2.3: Distribuição espacial do parâmetro de ordem  $\psi$  e o campo magnético  $\mathbf{H}$  numa interface supercondutor-normal.

$\kappa$  é considerado, para efeitos práticos como um parâmetro constante em T. Este parâmetro permite identificar o tipo de supercondutor: se  $\kappa < 1/2$  supercondutor tipo I e se  $\kappa > 1/2$  supercondutor tipo II.

# Capítulo 3

## Equação de Primeira Ordem

Desde que foram vistos pela primeira vez os vórtices individuais em supercondutores de tipo II, várias outras técnicas foram desenvolvidas para este propósito[21], como a microscopia de varredura SQUID [22], imagem magneto-óptica de alta resolução [23, 24], rotação de spin múo ( $\mu$ SR)[25, 26], microscopia de tunelamento por varredura[27, 28] e microscopia de força magnética[27]. Esses avanços na visualização de vórtices individuais abre as portas para investigar novas propriedades[29, 30], como as do estado de vórtice excitado (**EVE**). O **EVE** traz um novo paradigma para o estudo da dinâmica transitória de vórtices em supercondutores com fronteiras, um assunto de interesse atual devido ao começo de instabilidades[31]. Um supercondutor de tipo II, na presença de um campo magnético externo aplicado, contém vórtices em seu interior cuja densidade é fixada pelo proprio campo magnético. Uma vez que o campo aplicado é desligado, esse estado torna-se instável e os vórtices devem abandonar o supercondutor. No entanto, a sua saída pode ser dificultada pelas inomogeneidades microscópicas que os mantém dentro do supercondutor. Faremos uma distinção importante respeito ao estado de vórtice remanente no material supercondutor, de acordo a como seja sua energia comparada com a energia do estado normal. Ja que o estado de vórtice no interior do material supercondutor é sempre instável, somente no caso do que sua energia seja menor do que a energia do estado normal será chamado **EVE** (energia do estado de vórtice)

### 3.1 A energia livre de Gibbs de um supercondutor longo e as equações variacionais de segunda ordem

Neste trabalho é assumido um supercondutor longo, de seção transversal circular, tal que os efeitos da parte superior e na parte inferior são negligenciados, assim como uma simetria ao longo do eixo maior. Qualquer corte de uma seção transversal num plano dado  $z$  revela a mesma área  $\Sigma$  e as mesmas propriedades físicas. O campo magnético externo constante é orientado ao longo do eixo principal,  $\mathbf{H} = H_a \hat{z}$ . Portanto, o parâmetro de ordem é somente expresso por coordenadas neste plano,  $\psi(x, y)$ , e a única componente não-zero do campo magnético local é perpendicular a este plano,  $h_z(x, y) = \partial_x A_y(x, y) - \partial_y A_x(x, y)$ . A diferença entre as densidades de energia livres de Gibbs supercondutoras e normais,  $\Delta\mathcal{G}$ , é definida como:

$$\Delta\mathcal{G} = \mathcal{G}_s - \mathcal{G}_n = \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left\{ \alpha(T) |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{|\vec{D}\psi|^2}{2m} + \frac{(\vec{h}_z - \vec{H}_a)^2}{8\pi} \right\} \quad (3.1)$$

O estado normal,  $\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_n$ , é alcançado para  $\psi = 0$  e  $h_z = H_a$ . Os parâmetros de **GL** têm as propriedades que  $\beta > 0$  e,

$$\alpha(T) = \alpha_0 \left( \frac{T}{T_c} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\alpha(T) \text{ é } \begin{cases} < 0 & \text{para } T < T_c, \\ > 0 & \text{para } T > T_c, \end{cases}$$

onde  $\alpha_0$  é uma constante positiva. A notação vetorial é bidimensional, tal que  $\vec{D} = D_x \hat{x} + D_y \hat{y}$ , onde  $D_j \equiv \frac{\hbar}{i} \partial_j - q A_j(x, y)/c$ ,  $j = x, y$ . As equações de segunda ordem são obtidas fazendo variações em relação ao campo,  $\delta \vec{A}$  e em relação ao parâmetro de ordem,  $\delta \psi^*$ , o qual conduz a equação não linear de **GL**,

$$\frac{\vec{D}^2 \psi}{2m} + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi = 0, \quad (3.2)$$

e a lei de Ampère,

$$\vec{\nabla} \times \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3.3)$$

onde a densidade de corrente é dada por,

$$\vec{j} = \frac{q}{2m} \left( \psi^* \vec{D} \psi + \psi \vec{D}^* \psi^* \right). \quad (3.4)$$

Como foi dito na seção anterior as condições de fronteira devem ser adicionadas para encontrar as soluções físicas razoáveis. Seja  $\gamma$  o perímetro da área  $\Sigma$ . Na fronteira deve ser válido que,

$$\hat{n} \cdot \vec{j}|_{\vec{x}at\gamma} = 0, \text{ e}, \quad (3.5)$$

$$h_z|_{\vec{x}at\gamma} = H_a. \quad (3.6)$$

A equação 3.5 corresponde a nenhuma supercorrente fluindo para fora do supercondutor, e a equação 3.6 que, na fronteira do material supercondutor, o campo magnético no interior do mesmo deve ser igual ao campo magnético fora dele.

Como a corrente é dada pela equação 3.4, a condição sob na derivada do parâmetro da ordem,

$$\hat{n} \cdot \vec{D}\psi|_{\vec{x}at\gamma} = 0, \quad (3.7)$$

é suficiente para garantir a condição da equação 3.5.

## 3.2 Dupla visão da energia cinética e as equações de primeira ordem

A densidade de energia cinética admite uma formulação dupla, devido à identidade matemática na qual é provada no apêndice A, e é dada pela equação A.12

$$\frac{|\vec{D}\psi|^2}{2m} = \frac{|D_+\psi|^2}{2m} + \frac{\hbar q}{2mc} h_z |\psi|^2 + \frac{\hbar}{2q} (\partial_x j_y - \partial_y j_x), \quad (3.8)$$

onde  $D_+ \equiv D_x + iD_y$  e a corrente é dada pela equação 3.4. Essa decomposição da energia cinética como uma soma de três termos é exata, e sua derivação [32] é dada no apêndice. Portanto, a densidade de energia cinética,

$$F_k = \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \frac{|\vec{D}\psi|^2}{2m}, \quad (3.9)$$

também é dada pela equação,

$$F_k = \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left( \frac{|\vec{D}_+\psi|^2}{2m} + \frac{\hbar q}{2mc} h_z |\psi|^2 \right) + \frac{\hbar}{2q} \frac{1}{\Sigma} \oint_{\gamma} d\vec{l} \cdot \vec{j}. \quad (3.10)$$

Nesta visão dupla, há uma contribuição superficial (perimetral) devido a corrente. Para um supercondutor volumétrico, onde  $\Sigma \rightarrow \infty$ , a corrente superficial se anula devido a que as correntes são localizadas numa região dentro de volume longe das fronteiras ou devido as condições periódicas de contorno, sendo os últimos dos casos considerados por Abrikosov [9]. No entanto, no caso de uma área finita, caso de um supercondutor mesoscópico, a corrente não se anula e por isso deve ser considerada.

A propriedade mais interessante da dupla formulação da energia cinética é que a corrente também adquire uma nova formulação. A corrente pode ser simplesmente obtida pela variação da energia cinética em relação ao potencial vetorial,

$$\delta F_k = -\frac{1}{c} \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \vec{j} \cdot \delta \vec{A}, \quad (3.11)$$

e o uso da dupla formulação leva a

$$j_x = \frac{q}{2m} [(D_+\psi)^* \psi + \psi^* (D_+\psi)] - \frac{\hbar q}{2m} \partial_y |\psi|^2 \quad (3.12)$$

$$j_y = i \frac{q}{2m} [(D_+\psi)^* \psi - \psi^* (D_+\psi)] + \frac{\hbar q}{2m} \partial_x |\psi|^2. \quad (3.13)$$

O termo de corrente superficial não contribui porque, na fronteira( $\gamma$ ), a variação do potencial vetor,  $\delta\vec{A} = 0$ , para  $\vec{x}$  em  $\gamma$ .

Nesta dissertação buscamos o mínimo da energia livre através de soluções das equações de primeira ordem, dadas abaixo,

$$D_+\psi = 0, \text{ é} \quad (3.14)$$

$$h_z = H' - 2\pi \frac{\hbar q}{mc} |\psi|^2, \quad (3.15)$$

em vez de soluções das equações de segunda ordem, dadas pelas equações 3.2 e 3.3. Na equação 3.15,  $H'$  é uma constante a ser determinada, mas cuja interpretação é muito clara. Já que no núcleo do vórtice,  $\psi = 0$ , pela equação 3.15,  $H' = h_z$ , o seja,  $H'$  é o campo local  $h_z$ . Na ausência de vórtices, o parâmetro de ordem é constante e  $H' = 2\pi (\hbar q/mc) |\psi|^2$  já que deve segurar que  $h_z = 0$  em toda parte. Mostramos que as equações acima fornecem uma solução exata para a lei de Ampere e uma solução aproximada da equação não linear de **GL**, assim, oferecem(as equações 3.14 e 3.15) um método fácil e eficiente para achar o mínimo de energia livre.

A lei de Ampere é exatamente resolvida e para vê-lo, basta ter a condição da equação 3.14 para a corrente, como as dadas pelas equações 3.12 e 3.13. A lei de Ampère, dada por  $\partial_y h_z = 4\pi \vec{j}_x/c$  e  $\partial_x h_z = 4\pi \vec{j}_y/c$ , são transformadas em  $\partial_y h_z = -(4\pi \hbar q/2mc) \partial_y |\psi|^2$  e  $\partial_x h_z = -(4\pi \hbar q/2mc) \partial_x |\psi|^2$ , já que a equação 3.15 é válida. Então, obtém-se,

$$\vec{j} = \frac{\hbar q}{2m} \hat{k} \times \vec{\partial} |\psi|^2, \quad (3.16)$$

O termo da superfície, contido na dupla formulação da energia cinética, é dado pela equação 3.8.

$$\frac{\hbar}{2q} (\partial_x j_y - \partial_y j_x) = + \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\partial}^2 |\psi|^2. \quad (3.17)$$

A identidade matemática da equação 3.8, torna-se,

$$\frac{|\vec{D}\psi|^2}{2m} = \left( H' - \frac{\hbar q}{mc} |\psi|^2 \right) \frac{\hbar q}{2mc} |\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{4m} \vec{\partial}^2 |\psi|^2, \quad (3.18)$$

uma vez assumido que as equações de primeira ordem são satisfeitas. A equação não-linear de **GL ??** é aproximadamente resolvida no sentido de que sua versão integrada é resolvida exatamente. Esta versão integrada é obtida pela multiplicação da equação **GL** não-linear com  $\psi^*$ , e depois fazendo uma integração em toda a área  $\Sigma$  do supercondutor:

$$\int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left\{ \psi^* \frac{\vec{D}^2 \psi}{2m} + \alpha(T) |\psi|^2 + \beta |\psi|^4 \right\} = 0. \quad (3.19)$$

Transformaremos esta equação em uma equação algébrica cuja utilidade é fixar a escala do parâmetro de ordem o qual permaneceu indefinido quando foi resolvido a invariante escala equação 3.14. O primeiro termo da equação integrada somada com seu conjugado complexo e dividido por 2, pode ser expandido da seguinte forma,

$$\frac{1}{2} \left[ \psi^* \frac{\vec{D}^2 \psi}{2m} + \left( \frac{\vec{D}^2 \psi}{2m} \right)^* \psi \right] = -\frac{\hbar^2}{4m} \vec{\partial}^2 |\psi|^2 + \frac{|\vec{D}\psi|^2}{2m}. \quad (3.20)$$

Inserindo a equação 3.20 na equação integrada 3.19, somando com seu conjugado complexo e dividindo por 2, é obtido que,

$$\int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left\{ -\frac{\hbar^2}{4m} \vec{\partial}^2 |\psi|^2 + \frac{|\vec{D}\psi|^2}{2m} + \alpha(T) |\psi|^2 + \beta |\psi|^4 \right\} = 0 \quad (3.21)$$

O uso da equação 3.18 transforma a equação integrada 3.19 na seguinte:

$$\int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left\{ \left( \frac{H'}{2} \frac{\hbar q}{mc} + \alpha \right) |\psi|^2 - \left[ \pi \left( \frac{\hbar q}{mc} \right)^2 - \beta \right] |\psi|^4 \right\} = 0. \quad (3.22)$$

Em resumo, a equação 3.14, juntamente com a equação 3.22, determinam completamente o parâmetro da ordem,  $\psi$ , e da equação 3.15, é obtido o campo magnético local,  $h_z$ .

### 3.3 As condições de contorno, a magnetização e a energia livre de Gibbs

Não deve haver fluxo de corrente fora do supercondutor e o campo magnético deve ser contínuo na fronteira. Aqui abordamos a questão de como satisfazer essas condições de fronteira no contexto das equações de primeira ordem. As próprias condições de fronteira são equações de primeira ordem, como se vê nas equações 3.5 e 3.6, e assim, sua verificação é facilmente compreendida no contexto das equações de segunda ordem. Por exemplo, a derivada do parâmetro de ordem normal à superfície deve desaparecer, de acordo com equação 3.7, mas esta condição não pode ser imposta em  $\psi$ , obtida através da equação 3.14, porque esta é uma equação de primeira ordem e não há suficientes parâmetros livres nesta solução. No entanto, é possível satisfazer a equação 3.5 simplesmente pela exigência de que a densidade  $|\psi|^2$  seja constante na fronteira, no qual introduz um novo parâmetro,  $c_0$ , determinado pela equação não-linear integrada de **GL**, equação 3.22.

$$|\psi|^2 = c_0^2 \text{ para } \vec{x} \text{ at } \gamma \text{ é,} \quad (3.23)$$

$$H' = H_a + 2\pi \frac{\hbar q}{mc} c_0^2. \quad (3.24)$$

Portanto, a constante  $H'$  é automaticamente fixada por  $c_0$  de acordo com a equação 3.15. O ponto importante é que a equação 3.23 é suficiente para garantir que não haja corrente que flua fora do supercondutor, é uma consequência direta da equação 3.16, já que  $\vec{\partial}|\psi|^2 = 0$ . Como  $|\psi|^2$  é constante na fronteira não há gradiente tangencial a ele e sim perpendicular,  $\vec{\partial}|\psi|^2$  é normal a superfície, tornando  $\vec{j}$  sempre tangente à superfície.

A magnetização  $M_z$  também é obtida diretamente do formalismo atual e facilmente mostra-se paramagnética na ausência de um campo externo aplicado. De acordo com a equação 3.15,

$$B_z \equiv \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} h_z = H' - 4\pi\mu_B \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} |\psi|^2, \quad (3.25)$$

dados em unidades do magneton de Bohr,  $\mu_B = \frac{\hbar q}{2mc}$ . Basta seguir a relação termodinâmica  $B_z = H_a + 4\pi M_z$  e a equação 3.24 para obter que,

$$M_z = \mu_B \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} (c_0^2 - |\psi|^2), \quad (3.26)$$

o que significa que a integral tem a dimensão de inverso de volume. No caso de nenhum campo externo aplicado, o parâmetro de ordem é máximo na fronteira, ou seja ( $|\psi|^2 \leq c_0^2$ ), e então, a magnetização é paramagnética,  $M_z > 0$ .

Sob a condição de que as equações de primeira ordem estejam satisfeitas, a energia livre de Gibbs da equação 3.1 torna-se,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{G} = \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left\{ \left( \alpha(T) + \frac{H_a \hbar q}{2 mc} \right) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \left[ \beta - \pi \left( \frac{\hbar q}{mc} \right)^2 \right] |\psi|^4 \right\} \\ + \frac{(H' - H_a)^2}{8\pi} + \frac{\hbar^2}{4m} \oint_{\gamma} \frac{dl}{\Sigma} \hat{n} \cdot \vec{\partial} |\psi|^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Duas contribuições diretas da fronteira na energia livre, as quais não estão presentes no tratamento de A. Abrikosov sobre a teoria de **GL** [9], são a energia do campo devido a  $H' \neq H_a$ , de acordo com a equação 3.24, e a contribuição perimetral do gradiente normal de  $|\psi|^2$ .

Perto da transição para o estado normal, o parâmetro de ordem é fraco, fato que permite a expansão da energia livre em potências de  $\psi$ . Desde este ponto de vista, essa fraqueza também leva à proposta de um método iterativo para resolver as equações de primeira ordem. Em primeiro lugar, procura-se uma solução para  $\psi$  na equação 3.14 sob um campo externo conhecido  $H_0$  suficientemente próximo ao campo crítico superior que define o parâmetro de ordem nas proximidades da transição ao estado normal. Qualquer solução da equação 3.14, multiplicada por uma constante também é uma solução e esta constante é fixada pela equação integrada 3.22. A equação 3.14 pode ser reescrita como,

$$\left[ \left( -i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{2\pi}{\Phi_0} (A_x - iA_y) \right] \psi = 0. \quad (3.28)$$

Vamos introduzir a notação complexa,  $z \equiv x + iy$ ,  $\bar{z} \equiv x - iy$  em 3.28, e considere um campo

externo constante,  $H_a$ , tal que  $A_x = -H_a y/2$  e  $A_y = H_a x/2$ . Neste caso, a equação acima se torna,

$$\frac{\partial \psi(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = - \left( \frac{\pi H_a}{2\Phi_0} z \right) \psi(z, \bar{z}), \quad (3.29)$$

onde  $\partial/\partial_z = 1/2(\partial/\partial_x - i\partial/\partial_y)$  e seu complexo conjugate é  $\partial/\partial_{\bar{z}} = 1/2(\partial/\partial_x + i\partial/\partial_y)$ . A solução da equação 3.29 é achada

$$\psi(z, \bar{z}) = f(z) e^{-\left(\frac{\pi H_a}{2\Phi_0}\right) z \bar{z}}, \quad (3.30)$$

onde  $f(z)$  é qualquer função de  $z$ . O campo local é igual a  $H_a$  mais uma correção proporcional a  $|\psi|^2$  de acordo com a equação 3.15. Muito perto do estado normal, espera-se que esta correção seja pequena, de modo que basta resolver a equação 3.14 e manter a solução na equação 3.15 sem qualquer nova recorrência, ou seja, um retorno à equação 3.14 com uma  $\vec{A}$  corrigida associada ao campo local  $h_z$ . Assim, a busca de uma solução  $\psi(z, \bar{z})$  em uma geometria dada com área de seção transversal  $\Sigma$  e perímetro  $\gamma$  é reduzida a achar a função analítica  $f(z)$  que irá provocar que  $|\psi(z, \bar{z})|^2$  seja constante na fronteira,  $\gamma$ . Considerando que na fronteira  $|\psi|^2 = c_0^2$  isto significa que a função analítica  $f(z)$  deve satisfazer a condição  $|f(z)| = c_0 \exp(\pi H_a / 2\Phi_0 |z|^2)$ , onde  $z$  pertence na fronteira. Para um disco circular,  $|z|$  é constante na fronteira, mas no caso de uma geometria arbitrária, esta característica não é mais satisfeita. Neste trabalho, consideraremos apenas que não existe um campo externo aplicado,  $H_a = 0$ .

### 3.4 Unidades adimensionais

Neste ponto, achamos útil mudar para unidades adimensionais e reescrever todas as expressões anteriores dessa maneira. Como é sabido, a teoria **GL** tem apenas uma constante de acoplamento,  $\kappa = \lambda/\xi$ , a relação entre o comprimento de penetração de London  $\lambda = (mc^2/4\pi q^2 \psi_0^2)^{1/2}$  e o comprimento de coerência,  $\xi = (\hbar^2/2m|\alpha|)^{1/2}$ , respectivamente, onde  $\psi_0 = (|\alpha|/\beta)^{1/2}$ . Isso faz essa relação independente da temperatura,  $\kappa = (\beta/2\pi)^{1/2} mc/\hbar q$ , e

apenas dependente dos parâmetros dos materiais. Vamos nos referir apenas neste parágrafo as unidades adimensionais pela notação primada. Por exemplo, a distância é medida em termos do comprimento de coerência tal que  $\vec{x} = \xi \vec{x}'$ . O campo magnético é expresso em unidades do campo crítico superior,  $\vec{h} = H_{c2} \vec{h}'$ ,  $H_{c2} = \sqrt{2} \kappa H_c = \Phi_0 / 2\pi \xi^2$ ,  $\Phi_0 = hc/q$ , onde  $H_c = \Phi_0 / 2\pi \sqrt{2} \lambda \xi$  é o campo termodinâmico. Então, o potencial vectorial adimensional é dado por  $\vec{A} = H_{c2} \xi \vec{A}'$ , e a derivada covariante torna-se  $D_j = D'_j / \xi$ ,  $D'_j \equiv 1/i \partial'_j$  já que  $\partial_j = \partial'_j / \xi$ . O parâmetro de ordem adimensional é obtido de  $\psi = \psi_0 \psi'$ . O valor do parâmetro de ordem na fronteira também é definido sem dimensão,  $c_0 = \psi_0 c'_0$ , finalmente, a magnetização adimensional é  $M_z = M'_z H_{c2} / 8\pi \kappa^2$  já que  $\psi_0^2 \mu_B = H_{c2} / 8\pi \kappa^2$ .

Daqui em diante, tiramos a notação primada em todas as quantidades, o que significa que elas são todas expressas em unidades adimensionais. As equações de primeira ordem tornam-se,

$$D_+ \psi = 0, \quad (3.31)$$

$$h_z = H' - \frac{1}{2k^2} |\psi|^2. \quad (3.32)$$

Se o parâmetro de ordem e o campo magnético local satisfaçam as equações de primeira ordem, a energia cinética de 3.8 torna-se

$$|\vec{D}\psi|^2 = \left( H' - \frac{1}{2k^2} |\psi|^2 \right) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \vec{\partial}^2 |\psi|^2. \quad (3.33)$$

A equação integrada 3.22, em unidades reduzidas torna-se,

$$\int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left[ (H' - 1) |\psi|^2 + \left( 1 - \frac{1}{2k^2} \right) |\psi|^4 \right] = 0. \quad (3.34)$$

A diferença de energia livre de Gibbs da equação 3.35 está, em unidades de  $H_c^2 / 4\pi = |\alpha|^2 / \beta$  dada por,

$$\Delta \mathcal{G} = \frac{\mathcal{G} - \mathcal{G}_n}{|\alpha|^2 / \beta} = \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left\{ -|\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4 + |\vec{D}\psi|^2 + \kappa^2 (h_z - H_a)^2 \right\}. \quad (3.35)$$

Da mesma forma, a equação 3.27, torna-se,

$$\Delta\mathcal{G} = \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left\{ -(1 - H_a) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2\kappa^2} \right) |\psi|^4 + \frac{1}{2} \vec{\partial}^2 |\psi|^2 + \kappa^2 (H' - H_a)^2 \right\}. \quad (3.36)$$

### 3.5 Estado de vórtice excitado e a representação conforme

Nesta dissertação vamos considerar na seguinte situação física:

temos um material supercondutor cilíndrico longo tipo II, o qual esta em estado supercondutor (embaixo da temperatura crítica  $T = T_c$ ). Um campo magnético constante é ligado e os vórtices penetram dentro do material. O campo é desligado e vórtices remanentes ficam dentro do material no caso de que sua energia livre seja menor que a energia do estado normal do material. Neste caso chamamos este estado: **Estado de Vórtice Excitado, EVE**.

Na ausência de um campo aplicado fora do supercondutor,  $H_a = 0$ , e com ajuda da equação 3.34, a densidade de energia livre de Gibbs da equação 3.36 transforma-se,

$$\Delta\mathcal{G} = \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} \left\{ -\frac{1}{2} (1 + H') |\psi|^2 + \frac{1}{2} \vec{\partial}^2 |\psi|^2 + \kappa^2 H'^2 \right\}. \quad (3.37)$$

Então  $H'$  deriva-se diretamente da equação 3.24. Perto do estado normal, o parâmetro de ordem é o suficientemente pequeno para que a repetição das equações de primeira ordem não seja necessária. Isso significa que o campo magnético local é pequeno o suficiente para que ele possa ser descartado na equação 3.38 e obtido diretamente de 3.39. Neste caso, as equações 3.31 e equação 3.32 são reduzidas a:

$$\partial_+ \psi = 0, \quad e, \quad (3.38)$$

$$h_z = \frac{c_0^2 - |\psi|^2}{2\kappa^2} \quad (3.39)$$

A conexão entre os estados de vórtice e a representação conforme resulta da equação 3.29, que simplesmente se transforma em:

$$\frac{\partial\psi(z, \bar{z})}{\partial\bar{z}} = 0. \quad (3.40)$$

Expressando o parâmetro de ordem como  $\psi \equiv \psi_R + i\psi_I$  na equação 3.38, é obtido que  $\partial_x\psi_R + \partial_y\psi_I = 0$  e  $\partial_y\psi_R + \partial_x\psi_I = 0$ , as quais são as conhecidas condições de Cauchy-Riemann para uma função analítica. Recordamos o chamado *Teorema do Módulo Máximo* em Matemática, que diz que, para uma função analítica  $\psi(z)$  em uma determinada região  $\Sigma$ , o valor máximo de  $|\psi(z)|$  necessariamente cai em sua fronteira  $\gamma$ . Este teorema é útil porque, a partir dele, sabemos que o parâmetro de ordem, constante na fronteira, atinge o seu máximo valor lá, e, portanto, a magnetização é necessariamente paramagnética. A presença de vórtices dentro do material supercondutor, só levará ao desaparecimento do parâmetro de ordem em pontos no seu interior,  $\psi = 0$ , e o máximo de  $|\psi|$  na fronteira. Esta característica ajuda a estabelecer diferenças fundamentais entre fronteira finita e supercondutor volumétrico, no último caso apenas soluções periódicas são procuradas. De acordo com o teorema de Liouville [33] Qualquer função analítica periódica  $\psi$  com zeros também deve divergir, a partir do qual se conclui que a única solução física possível é a constante. Em outras palavras, não é possível encontrar soluções vórtices sem a presença de um campo aplicado em uma célula unitária com condições de fronteira periódicas. No entanto, eles existem para o supercondutor longo com uma seção transversal finita. Assim, concluímos a partir da discussão acima que o presente método é geral e se aplica a qualquer número de vórtices em qualquer geometria de seção transversal. Como exemplos de nosso método geral, detalhamos nesta dissertação dois casos particulares de um disco, ou seja, o vórtice com vorticidade  $\mathbf{L}$  em seu centro e o vórtice com vorticidade um em qualquer posição dentro do disco. Definamos as integrais,

$$I_2 \equiv \frac{1}{c_0^2} \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} |\psi|^2, \quad (3.41)$$

$$I_4 \equiv \frac{1}{c_0^4} \int_{\Sigma} \frac{d^2x}{\Sigma} |\psi|^4. \quad (3.42)$$

$$I_\gamma \equiv \frac{1}{c_0^2} \int_\Sigma \frac{d^2x}{\Sigma} \vec{\partial}^2 |\psi|^2. \quad (3.43)$$

Essas integrais são resolvidas em detalhes em [34].

A partir da equação integrada 3.34 e a condição de que o campo magnético local anula-se na fronteira, obtém-se que,

$$c_0^2 = \frac{1 - H' I_2}{1 - 1/2\kappa^2 I_4}, \quad e, \quad (3.44)$$

$$H' = \frac{c_0^2}{2\kappa^2}. \quad (3.45)$$

Resolvendo estas equações para  $c_0$  e  $H'$ , obtemos,

$$c_0^2 = \frac{2\kappa^2 I_2 / I_4}{2\kappa^2 - 1 + I_2 / I_4}, \quad e, \quad (3.46)$$

$$H' = \frac{I_2 / I_4}{2\kappa^2 - 1 + I_2 / I_4}. \quad (3.47)$$

Observe que  $I_2 > I_4$  é satisfeito porque o parâmetro de ordem dividido por  $c_0$  é sempre  $< 1$  dentro do disco, e assim, em cada ponto, a segunda potência, equação 3.41, é maior que a quarta potência, equação (3.42). O fato de que  $I_2 > I_4$  e  $\kappa > 1/\sqrt{2}$ , produz sempre uma solução para  $c_0$ ,

$$\Delta\mathcal{G} = -\frac{1}{2} (I_2 - I_\gamma) c_0^2 - \frac{1}{4\kappa^2} (I_2 - 1) c_0^4, \quad (3.48)$$

Ou em termos de  $H'$ ,

$$\Delta\mathcal{G} = -\kappa^2 (I_2 - I_\gamma) H' - \kappa^2 (I_2 - 1) H'^2. \quad (3.49)$$

A magnetização dada pela equação 3.26 transforma-se  $M_z = 2\kappa^2 H' - I_2 c_0^2$ , e assim, equal a,

$$M_z = \frac{2\kappa^2 (1 - I_2) I_2 / I_4}{2\kappa^2 - 1 + I_2 / I_4}. \quad (3.50)$$

Esta expressão mostra que a magnetização depende da posição dos vórtices no interior do supercondutor, já que  $I_2$  e  $I_4$  variam adequadamente, como é mostrado no próximo exemplo. No caso de nenhum vortice,  $I_2 = I_4 = 1$ , a magnetização se anula. Incluímos demás a expressão geral para o campo magnético no centro do vórtice como  $h_z = H'$ :

$$h_z(v) = \frac{I_2/I_4}{2\kappa^2 - 1 + I_2/I_4}. \quad (3.51)$$

Consideramos dois exemplos particulares de um cilindro longo e fino com raio  $R$ , um vórtice  $L$  no centro e outro com vórtice  $L = 1$  em uma posição arbitrária. Através deles, vemos os aspectos gerais da presente teoria, como, por exemplo, a importância do termo de fronteira que faz a energia de Gibbs explicitamente dependente de  $R$ . Notavelmente, a densidade do par de Cooper na fronteira determina o campo magnético local no núcleo do vórtice. Lá  $\psi(v) = 0$  e, portanto,  $h_z(v) = c_0^2/2\kappa^2$  de acordo com a equação 3.32 onde  $v$  se refere ao centro do vórtice.

## 3.6 Cilindro longo com uma seção transversal circular

Achamos útil aplicar nossa teoria ao Niobio [35],[36], um dos materiais favorecidos para estudar as características da matéria dos vórtices em supercondutores e também usado para construir supercondutores em nano-engenharia [37]. Todas as figuras são expressas em unidades reduzidas e para recuperar os valores previstos para Niobio levamos em consideração os valores dos parâmetros relatados em [36], ou seja,  $\kappa = 2.1$ ,  $\lambda_0 = 42$  nm e  $\xi_0 = 20$  nm. Em particular, escolhimos a temperatura como  $T = 7.7$  K, que está perto da temperatura crítica,  $T_c = 9.3$  K, de modo que a aproximação do parâmetro de ordem é válida. Assim, para esta temperatura, o campo magnético local, expresso em unidades do campo crítico superior, deve ser multiplicado por  $H_{c2, T = 7.7 \text{ K}} = 780$  Oe. Da mesma forma, a magnetização deve ser multiplicada por  $H_{c2}(T = 7.7) / 8\pi\kappa^2 \text{ K} = 7.0$  Oe

### 3.6.1 Vorticidade $L$ no centro

Neste exemplo, mostramos que o **EVE** existe apenas em uma faixa especial do raio e de vorticidade. A busca do parâmetro de ordem em uma seção transversal de disco do raio  $R$  que satisfaz a equação 3.38, é reduzida á encontrar uma função analítica constante no perímetro do disco. Esta é simplesmente dada por,

$$\psi = c_0 \left( \frac{z}{R} \right)^L = c_0 \left( \frac{r}{R} \right)^L e^{iL\theta}, \quad (3.52)$$

onde  $c_0$  é o valor do parâmetro de ordem na fronteira e  $L$  é um inteiro já que o parâmetro de ordem é considerado unívoca,  $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$ . Em coordenadas polares, o parâmetro de ordem é expresso em termos de  $r \equiv \sqrt{z\bar{z}}$  e  $\tan \theta \equiv y/x$ . O comprimento de  $|\psi| = c_0$  no círculo garante o confinamento da corrente a fronteira do supercondutores, e  $\psi = 0$  no centro significa que a solução não tem vorticidade zero para  $L \neq 0$ . Para  $L = 0$  não há zero e, portanto, descreve-se o estado fundamental homogêneo. Então, pode-se determinar as integrais das equações 3.41-3.43.

$$I_2 = \frac{1}{L+1}, \quad (3.53)$$

$$I_4 = \frac{1}{2L+1}, \quad e, \quad (3.54)$$

$$I_\gamma = \frac{4L}{R^2}. \quad (3.55)$$

Das equações 3.46 e 3.47, é obtido,

$$c_0^2 = \frac{2\kappa^2(2L+1)}{2\kappa^2(L+1)+L}, \quad e, \quad (3.56)$$

$$H' = \frac{(2L+1)}{2\kappa^2(L+1)+L}. \quad (3.57)$$

Inserindo essas expressões na densidade de energia livre de Gibbs, seja a equação 3.48 ou 3.49, resulta que

$$\Delta\mathcal{G} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{L+1} - \frac{4L}{R^2} - \frac{L}{L+1} \frac{2L+1}{2\kappa^2(L+1)+L} \right] \times \frac{2\kappa^2(2L+1)}{2\kappa^2(L+1)+L}. \quad (3.58)$$

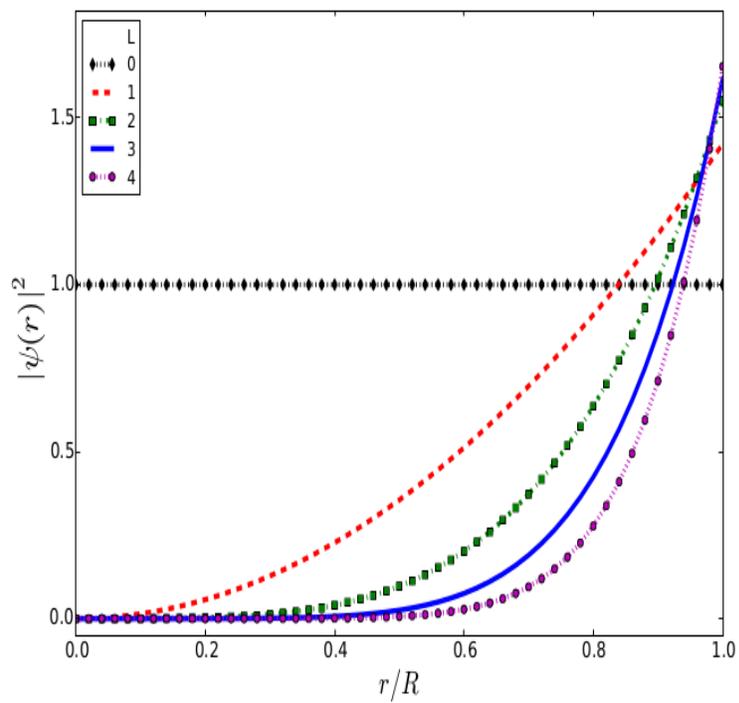


Figura 3.1: A densidade supercondutora em função da distância relativa do centro do cilindro para a vorticidade variando de  $L = 0$  a  $L = 4$  no caso de um vórtice fixado no centro ( $\kappa = 2.1$ ).

A condição para a existência do **EVE**,  $\Delta\mathcal{G} \leq 0$ , só pode ser alcançada para uma gama limitada de parâmetros  $R$  e  $\kappa$ . Isso significa que o **EVE** existe para um determinado supercondutor  $\kappa$  em caso de o raio for maior do que um valor crítico, dado por,

$$R_c = 2\sqrt{L(L+1) \frac{2\kappa^2(L+1) + L}{2\kappa^2(L+1) - 2L^2}}. \quad (3.59)$$

No limite  $\kappa \rightarrow \infty$ , o raio crítico torna-se  $R_c = 2\sqrt{L(L+1)}$ , e a energia livre de Gibbs para  $R > R_c$ , torna-se negativa,  $\Delta\mathcal{G} \rightarrow [4L(L+1) - R^2](2L+1) / [2R^2(L+1)^2]$ . O parâmetro de ordem e o campo magnético local são dados por,

$$\psi(r, \theta) = \sqrt{\frac{2\kappa^2(2L+1)}{2\kappa^2(L+1) + L}} \left(\frac{r}{R}\right)^L e^{iL\theta}, \quad e, \quad (3.60)$$

$$h_z(r) = \frac{(2L+1)}{2\kappa^2(L+1) + L} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{2L}\right]. \quad (3.61)$$

A magnetização paramagnética e o campo no centro do vórtice são dados por,

$$M_z = \frac{L}{L+1} \frac{2\kappa^2(2L+1)}{2\kappa^2(L+1) + 1}, \quad e, \quad (3.62)$$

$$h_z(v) = \frac{2L+1}{2\kappa^2(L+1) + L}. \quad (3.63)$$

respectivamente.

A figura 3.1 mostra a densidade supercondutora de acordo com a distância ao centro para a vorticidade desde  $L = 0$  (o estado homogêneo) até  $L = 4$ . A densidade  $|\psi|^2$  obtida da equação 3.52 e  $c_0^2$  dado pela equação 3.56. A densidade supercondutora é máxima na fronteira, o que implica um efeito paramagnético, como foi mostrado anteriormente. A densidade supercondutora atinge  $c_0^2$  na fronteira e é uma função de crescimento lento de  $L$  para  $\kappa \geq 1/\sqrt{2}$ . A figura 3.2 representa o campo magnético local versus a distância ao centro, para a vorticidade variando de  $L = 0$  a  $L = 4$ . Este gráfico mostra  $h_z(r)$  obtido da equação 3.39, com  $c_0^2$  e  $|\psi|^2$  conforme descrito na figura 3.2. Observe que o campo no núcleo  $h_z(v)$ , onde  $v$  corresponde a  $r = 0$ , segue da equação 3.51. Assim, ela depende de  $L$  através das integrais  $I_2$  e  $I_4$ , definidas pelas equações 3.53 e 3.54. Curiosamente, o campo magnético no

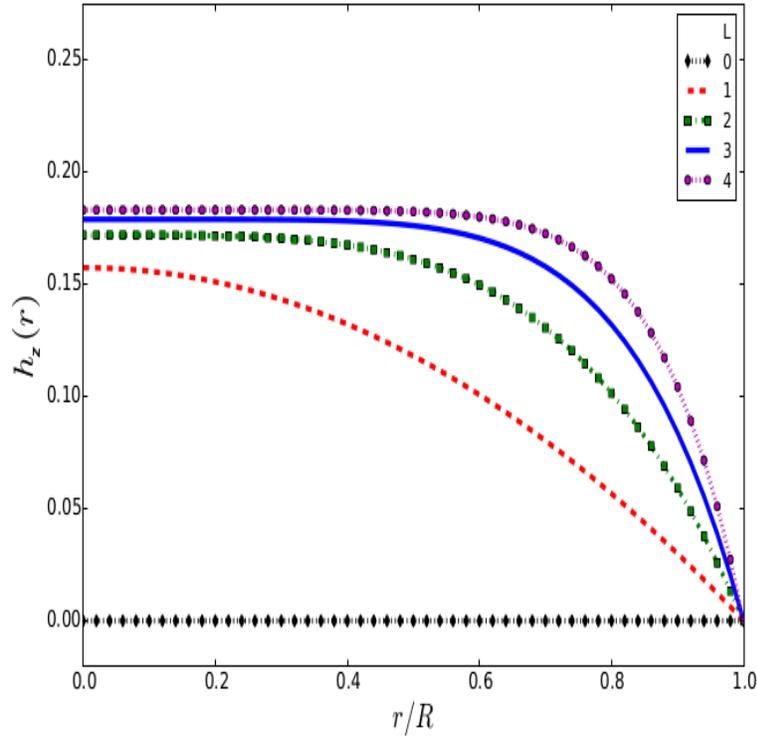


Figura 3.2: O campo magnético local em função da distância relativa do centro do cilindro para a vorticidade variando de  $L = 0$  a  $L = 4$  no caso de um vórtice fixado no centro ( $\kappa = 2.1$ ). Para recuperar os valores de Nióbio à temperatura de  $T = 7,7K$ , o eixo vertical deve ser multiplicado por  $H_{c2}(T = 7,7K) = 780Oe$

centro do vórtice e a densidade supercondutora na fronteira estão diretamente relacionadas entre si, como já foi mostrado anteriormente. Com exceção do estado homogêneo, que não possui campo magnético interno, para todos os outros estados  $L \geq 1$ , o campo magnético local é máximo no centro. O campo magnético local atinge seu máximo no centro e se anula na fronteira, como é esperado.

Para  $L \geq 2$ , o campo local varia lentamente do centro para o meio do cilindro depois cai abruptamente. A densidade de energia livre de Gibbs em função do raio do cilindro é mostrada para dois casos,  $R = 1$  e  $R = 10$ , na figura 3.3. Este gráfico mostra que o estado homogêneo  $L = 0$  é o estado fundamental absoluto com a energia mínima,  $\Delta\mathcal{G} = -0,5$ . Lembre-se de que nossa pesquisa é para o **EVE**, ou seja, para  $\Delta\mathcal{G} < 0$  caso contrário,

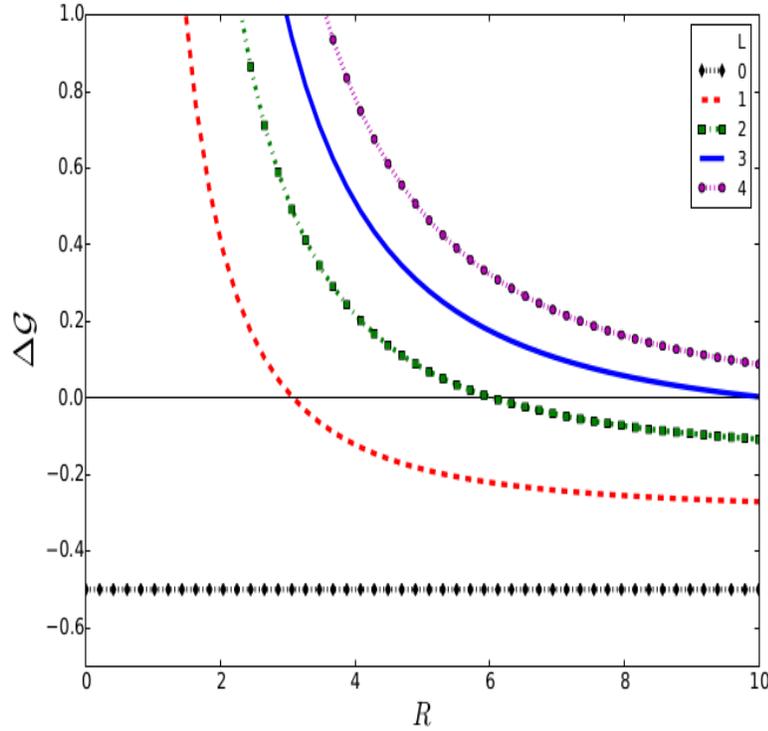


Figura 3.3: A diferença de energia livre de Gibbs entre os estados supercondutores e normais em função do raio do cilindro para a vorticidade variando de  $L = 0$  a  $L = 4$  no caso de um vórtice fixado no centro ( $\kappa = 2.1$ ). O estado de vórtice excitado existe apenas na faixa negativa desta diferença.

$\Delta\mathcal{G} > 0$  e o estado supercondutor pode de alguma forma desintegrar-se no estado normal. Por exemplo, o valor extremo desse gráfico,  $R = 10$ , mostra que os estados  $L = 0, 1, 2$  são **EVS** enquanto que os  $L = 3, 4$  não são. A energia livre de Gibbs tem os seguintes valores,  $\Delta\mathcal{G} = -0,27, -0,11, 0,003$  e  $0,09$  para  $L = 1, 2, 3, 4$ , respectivamente. O **EVE** existe para  $R > R_c$ ,  $R_c = 3.1, 6.0, 10.2, 17.3$  para  $L = 1, 2, 3, 4$ , respectivamente.

### 3.6.2 Vorticidade $L = 1$ em qualquer posição

A função analítica de  $z$  que descreve o parâmetro de ordem de um único vórtice em qualquer

posição  $0 \leq a \leq R$  dentro de um disco é dada por,

$$\psi(z) = c_0 \frac{\frac{z}{R} - \frac{a}{R}}{1 - \frac{z\bar{a}}{R^2}}, \quad (3.64)$$

onde  $c_0$  é o valor do parâmetro de ordem na fronteira. A coordenada  $z$  e a posição  $a$  podem ser expressas em forma polar,  $z = re^{i\theta}$  e  $a = a_0 e^{i\alpha}$ , onde podemos considerar que  $\alpha = 0$  sem perda de generalidade.

$$\psi(r) = c_0 R \frac{re^{i\theta} - a_0}{R^2 - a_0 r e^{i\theta}}. \quad (3.65)$$

A densidade de elétrons supercondutores é dada por,

$$|\psi|^2 = |c_0|^2 R^2 \frac{r^2 + a_0^2 - 2a_0 r \cos(\theta)}{R^4 + a_0^2 r^2 - 2a_0 r R^2 \cos(\theta)}. \quad (3.66)$$

As integrais das equações 3.41 -3.43 podem ser exatamente obtidas e são dadas por,

$$I_2 = 2 - \frac{R^2}{a_0^2} - \left( \frac{R^2}{a_0^2} - 1 \right)^2 \ln \left( 1 - \frac{a_0^2}{R^2} \right), \quad (3.67)$$

$$I_4 = -4 \left( \frac{R}{a_0} \right)^4 + 6 \left( \frac{R}{a_0} \right)^2 - 1 - 4 \left( \frac{R}{a_0} \right)^2 \left[ \left( \frac{R}{a_0} \right)^2 - 1 \right]^2 \ln \left( 1 - \left( \frac{a_0}{R} \right)^2 \right), \quad (3.68)$$

$$I_\gamma = \frac{4}{R^2}. \quad (3.69)$$

Depois, tomaremos dois limites especiais dessas expressões. No primeiro, o vórtice é apenas um pouco deslocado do centro, e as expressões da seção anterior devem ser recuperadas. Este é o limite  $a_0 \rightarrow 0$ , mas para obtê-lo, a seguinte expansão aproximada para a função logaritmo deve ser introduzida,  $\ln(1 - x^2) \approx -x^2 - x^4/2 - x^6/3 - x^8/4 - x^{10}/5 - x^{12}/6$ . Então, obtem-se as expressões aproximadas necessárias para as integrais  $I_2$  e  $I_4$ , respectivamente,

$$I_2 \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{R} \right)^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{a_0}{R} \right)^4 + \frac{1}{30} \left( \frac{a_0}{R} \right)^6 + \frac{1}{60} \left( \frac{a_0}{R} \right)^8 - \frac{2}{15} \left( \frac{a_0}{R} \right)^{10} + \frac{1}{6} \left( \frac{a_0}{R} \right)^{12}, \quad (3.70)$$

$$I_4 \approx \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{a_0}{R}\right)^2 + \frac{2}{15} \left(\frac{a_0}{R}\right)^4 + \frac{1}{15} \left(\frac{a_0}{R}\right)^6 - \frac{8}{15} \left(\frac{a_0}{R}\right)^8 + \frac{2}{3} \left(\frac{a_0}{R}\right)^{10}. \quad (3.71)$$

A partir dessas expressões aproximadas podemos verificar facilmente que  $I_2 = 1/2$ ,  $I_4 = 1/3$  e  $I_\gamma = 4/R^2$ , que são exatamente as equações 3.53 - 3.55 para  $L = 1$ .

O outro limite interessante é o vórtice muito próximo da fronteira do cilindro. Para tratá-lo, mudamos para a coordenada que expressa a distância do vórtice para a fronteira, definida por  $y \equiv R - a_0$ . Inserindo este novo parâmetro no parâmetro de ordem, obtemos a densidade do supercondutor dada por,

$$|\psi|^2 = c_0 \frac{\left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{r}{R} \cos(\theta)}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{r}{R} \cos(\theta)}. \quad (3.72)$$

O campo magnético local da equação (3.32) leva em consideração a densidade dada pela equação 3.72. As expressões para  $c_0$  e  $H_0$ , dadas pelas equações 3.46 e 3.47, respectivamente, são funções de  $I_2$  e  $I_4$ , que em termos da coordenada  $y$  são dadas por,

$$I_2 = 2 - \left(1 - \frac{y}{R}\right)^{-2} - \left[\left(1 - \frac{y}{R}\right)^{-2} - 1\right]^2 \ln \left[1 - \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2\right], \quad e, \quad (3.73)$$

$$I_4 = -4 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^{-4} + 6 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^{-2} - 1 - 4 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^{-2} \left[\left(1 - \frac{y}{R}\right)^{-2} - 1\right]^2 \ln \left[1 - \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2\right]. \quad (3.74)$$

Da mesma forma, a densidade de energia livre de Gibbs (equação 3.48 ou 3.49) é uma função das equações 3.73 e 3.74, mas também da equação 3.69, o que torna esta dependente explicitamente de  $R$ .

Muito perto do limite do disco  $R \gg y$ , o que significa que o limite  $y \approx 0$  deve ser tomado. Considere apenas o termo de primeira ordem na expansão em  $y$  para obter que  $I_2 \approx 1 - 2y/R$

e  $I_4 \approx 1 - 4y/R$  e assim,  $I_2/I_4 \approx 1 + 2y/R$ . Então obtemos que,

$$\tilde{H} \approx \frac{1}{2\kappa^2} + \frac{1}{\kappa^2} \left(1 - \frac{1}{2\kappa^2}\right) \frac{y}{R}, \quad e, \quad (3.75)$$

$$c_0^2 \approx 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2\kappa^2}\right) \frac{y}{R}. \quad (3.76)$$

A magnetização paramagnética se torna,

$$M_z \approx 2 \frac{y}{R} > 0. \quad (3.77)$$

A densidade de energia livre de Gibbs é dada por,

$$\Delta\mathcal{G} \approx -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{R^2}\right) + \left[\frac{1}{k^2} + \frac{4}{R^2} \left(1 - \frac{1}{2\kappa^2}\right)\right] \frac{y}{R}. \quad (3.78)$$

Para  $R \rightarrow \infty$ ,  $c_0^2 = 1$ ,  $H_0 = 1/2\kappa^2$ ,  $Mz = 0$  e  $\Delta\mathcal{G} = -1/2$ , o que significa que o estado homogêneo é recuperado.

A figura 3.4 mostra a densidade de energia livre de Gibbs em relação à razão  $a_0/R$ . As curvas plotadas são obtidas da equação 3.48 com  $c_0^2$  dada pela equação 3.46 e os valores das integrais  $I_2$ ,  $I_4$  e  $I_\gamma$  dados pelas equações 3.67 - 3.69, respectivamente. Os dois casos mostrados,  $R = 3$  e  $R = 10$  demonstram que a existência do **EVE** depende da posição do vórtice. Em ambos os casos, a energia livre de Gibbs diminui monotonicamente do centro para o limite do cilindro. Para  $R = 10$ , o vórtice em qualquer posição está em um **EVE**, uma vez que a energia livre de Gibbs é sempre negativa, mas isso não é assim para o cilindro  $R = 3$ . A energia livre de Gibbs é positiva para  $a_0 < 0.24R$  de modo que apenas para  $a_0 > 0.24R$  existe um **EVE**. A energia livre de Gibbs é nula para  $a_0 = 0, 24R$  e diminui até atingir o valor  $\Delta\mathcal{G} = -0.27$  na fronteira.

A figura 3.5 ilustra como o campo magnético local no núcleo do vórtice varia de acordo com a posição do mesmo. Esta figura mostra que este campo  $h_z(v)$  depende da razão  $a_0/R$  de acordo com a equação 3.51. Assim, esta só depende da razão  $I_2/I_4$ , definida pelas equações 3.67 e 3.68, respectivamente. O campo local é máximo no centro do vórtice. Por sua parte  $h_z(v)$  atinge um máximo quando o vórtice está no centro e diminui lentamente quando o

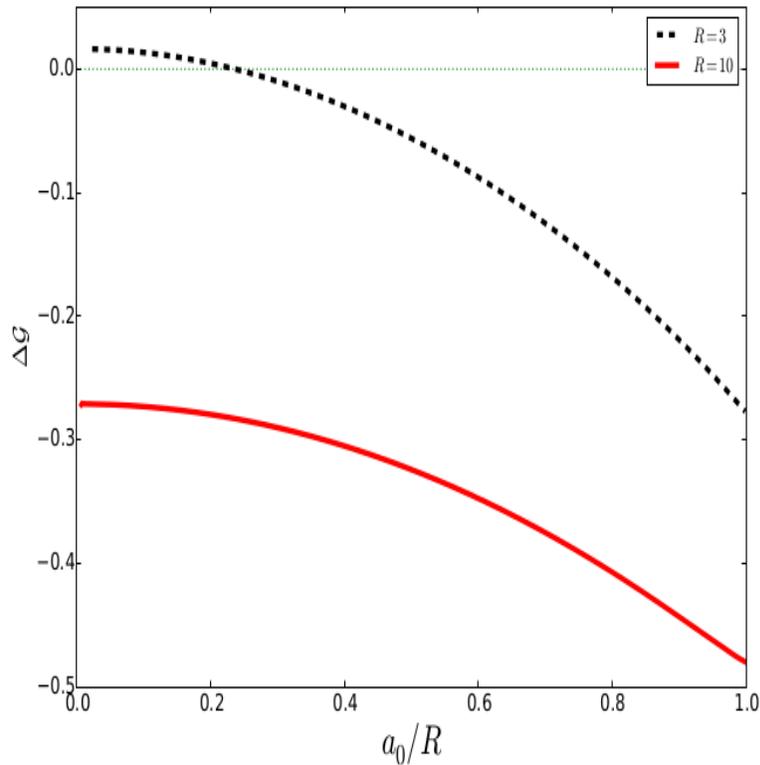


Figura 3.4: A diferença de energia livre de Gibbs entre os estados supercondutores e os estados normais como função da posição dos vórtices dentro do cilindro em caso de vorticidade um. São considerados dois raios de cilindros ( $\kappa = 2, 1$ ). O estado de vórtice excitado existe apenas na faixa negativa desta diferença.

vórtice está posicionado na fronteira. A figura 3.5 está de acordo com a figura 3.2, uma vez que  $h_z(0)$  para  $a_0 = 0$  corresponde a  $h_z(r = 0)$  para  $L = 1$ .

A figura 3.6 mostra a magnetização paramagnética como uma função da razão  $a_0/R$  obtida da equação 3.50. Curiosamente, a magnetização depende da posição do vórtice, de acordo com as integrais  $I_2$  e  $I_4$ , dadas pelas equações 3.67 e 3.68, respectivamente. A magnetização é mais forte para o vórtice perto do centro do cilindro e mais fraca perto da fronteira do cilindro. Para um vórtice na fronteira,  $a_0 = R$ , a magnetização desaparece porque  $I_2 = 1$ . Isso é consistente com a descrição da saída do vórtice, embora  $h_z(v)$  não seja zero, como pode ser visto na figura 3.5. O vórtice perto da fronteira significa que a densidade supercondutora é quase homogênea em toda a região do cilindro e a integral é quase igual à unidade o que

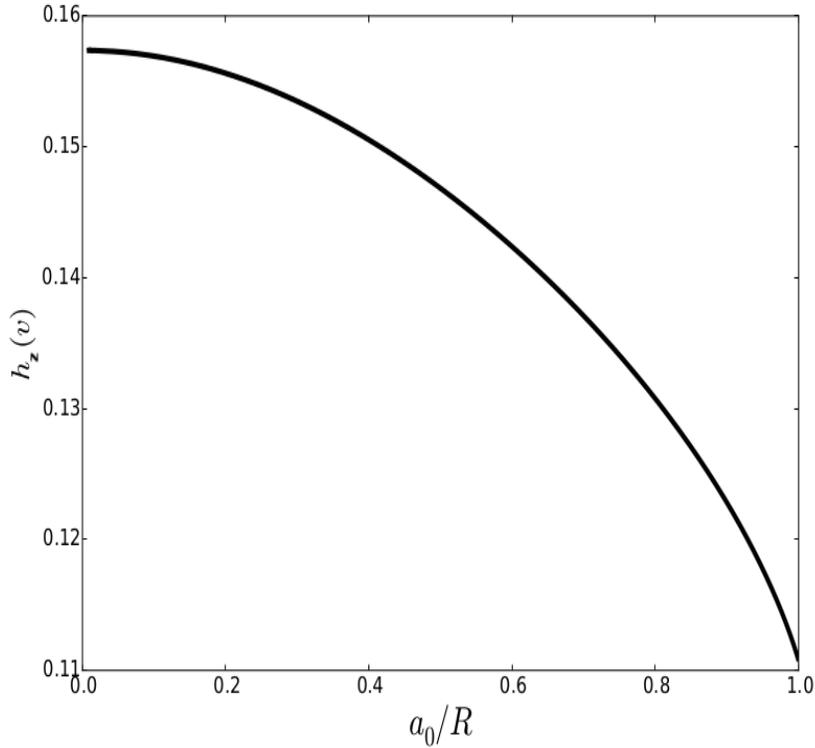


Figura 3.5: O campo magnético no centro do vórtice como função da posição do vórtice dentro do cilindro ( $\kappa = 2.1$ ). Para recuperar o valor de Niobium à temperatura de  $T = 7,7$  K, o eixo vertical deve ser multiplicado por  $H_{c2}(T = 7,7) \text{ K} = 780 \text{ Oe}$ .

faz que a magnetização vá para zero, como pode ser visto na equação 3.50.

Finalmente, as três fileiras da figura 3.7 representam o vórtice em três posições diferentes,  $a_0/R = 0.1, 0.5$  e  $0.9$ , respectivamente. As colunas correspondem a densidade, campo magnético local, corrente e fase, respectivamente. A densidade é obtida das equações 3.66 e 3.46, com as integrais das equações 3.73 e 3.74. Portanto, a densidade varia de zero para o centro do vórtice, até o valor máximo  $c_0^2$  na fronteira. A densidade é mostrada nas figuras 3.7(a), (e) e (i) esquema de cores (on-line) variando de baixa densidade (ciano) a alta densidade (magenta). O campo magnético local é obtido da equação 3.32 e varia do valor dado pela equação 3.63 no centro do vórtice para zero na fronteira. Assim, o esquema (em cores) das figuras 3.7 (b), (f) e (j) variam do máximo no centro do vórtice (magenta) para zero na fronteira (ciano). A corrente de vórtice é obtida da equação 3.16 e representada nas

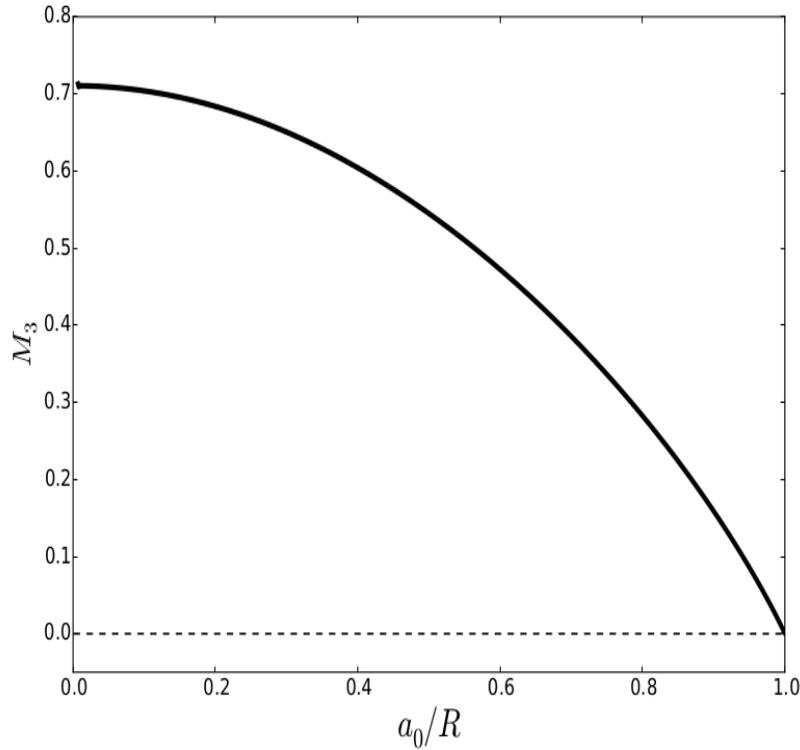


Figura 3.6: A magnetização como função da posição do vórtice dentro do cilindro ( $\kappa = 2.1$ ). Para recuperar o valor de Niobium para a temperatura de  $T = 7.7$  K, o eixo vertical deve ser multiplicado por  $H_{c2}(T = 7.7 \text{ K})/8\pi\kappa^2 = 7.0$  Oe

figuras 3.7 (c), (g) e (k). Observe que não há corrente que flui para fora do cilindro à medida que o vórtice se move em direção a fronteira, que é uma propriedade geral garantida pelo formalismo apresentado.

Finalmente as figuras 3.7 (d), (h) e (l) mostram a fase do parâmetro da ordem, definida como  $\tan^{-1}(\psi_I/\psi_R)$ . A descontinuidade, representada como uma linha recta que separa abruptamente o branco ao preto, confirma a presença de um vórtice no cilindro.

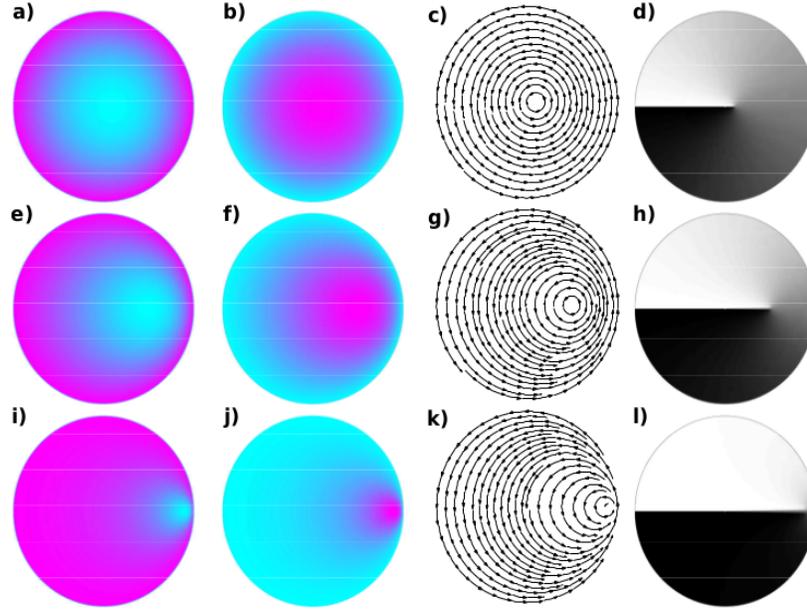


Figura 3.7: A densidade supercondutora, o campo magnético local, a densidade da corrente elétrica e a fase do parâmetro de ordem são mostrados em três posições diferentes do vórtice dentro do cilindro,  $a_0/R = 0.1$  ((a) a (d)),  $0.5$  (( e) a (h)) e  $0.9$  ((i) a (l)) do vórtice dentro do cilindro. As figuras (a), (e) e (i) exibem a densidade no esquema variado de baixa densidade (ciano) a alta densidade (magenta). O esquema (em cores) é distinto para cada uma dessas três figuras, pois a densidade varia de zero no centro do vórtice para  $c_0^2$  no limite, cujo valor varia de acordo com a posição do vórtice dentro do cilindro (ver Eqs (66), (46), (73) e (74)). O campo magnético local é mostrado nas figuras (b), (f) e (j), e o esquema de cores é distinto para cada uma dessas três figuras. Ele varia do máximo no centro do vórtice (magenta), de acordo com as Eq. (32) e (63), para zero no limite (ciano). As figuras (c), (g) e (k) mostram a corrente de vórtice em torno do vórtice obtido da Eq. 3.16. As figuras (d), (h) e (l) mostram a fase do parâmetro de ordem. A linha de descontinuidade que divide o branco na região negra mostra a existência de um único vórtice dentro do cilindro. O intervalo de cores de branco a preto descreve a fase de  $0$  a  $2\pi$ .

# Capítulo 4

## Conclucões

A equação de Ginzburg-Landau de segundo ordem foi reduzida a uma de primeiro ordem, usando a representação dual da energia cinética. Com tudo isso foi possível achar uma solução analítica aproximada daquela equação.

Incluimos, nesta dissertação, o tratamento de fronteiras no método de equações de primeiro ordem usado por A. Abrikosov para prever a rede de vórtices. Encontramos uma conexão direta entre esse método e a teoria da representação conforme. Usando este método consideramos os estados de vórtice remanescentes dentro do supercondutor após o campo externo aplicado ser desligado.

Este estado de vórtice é instável, o que significa que os vórtices devem abandonar o supercondutor, devido a que sua presença é termodinamicamente proibida. No entanto, os vórtices são topológicos estáveis, se existe o estado supercondutor. Definimos aqui o estado vórtice excitado (**EVE**), cuja energia livre é menor que a do estado normal. Assim, o estado do vórtice remanescente no supercondutor não pode colapsar ao estado normal devido a que a sua energia livre é menor que aquela do estado normal. Calculamos a magnetização paramagnética do estado do vórtice excitado para alguns casos particulares em um fio longo e fino de Niobium.

# Apêndice A

## Anexos

### A.1 Anexo I

#### DECOMPOSIÇÃO DA ENERGÍA CINÉTICA

Considere o termo  $|D_+\psi|^2$ , que pode ser adaptado como,

$$\begin{aligned} |D_+\psi|^2 &= [(D_x\psi)^* - i(D_y\psi)^*][(D_x\psi) + i(D_y\psi)] \\ &= (D_x\psi)^*(D_x\psi) + (D_y\psi)^*(D_y\psi) + \\ &\quad i[(D_x\psi)^*(D_y\psi) - (D_y\psi)^*(D_x\psi)] \end{aligned} \tag{A.1}$$

Expandindo somente a derivada  $D_x$ ,

$$\begin{aligned} (D_x\psi)^*(D_y\psi) &= \left( -\frac{\hbar}{i}\partial_x\psi^* - \frac{q}{c}A_x\psi^* \right) (D_y\psi) \\ &= \partial_x \left[ -\frac{\hbar}{i}\psi^*(D_y\psi) \right] \\ &\quad - \left( \frac{\hbar}{i}\psi^* \right) \partial_x D_y\psi - \frac{q}{c}A_x\psi^* D_y\psi. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Reorganizando os termos é obtido,

$$(D_x\psi)^*(D_y\psi) = -\frac{\hbar}{i}\partial_x(\psi^* D_y\psi) + \psi^* D_x D_y\psi. \tag{A.3}$$

Do mesmo modo, obtemos que,

$$(D_y\psi)^* (D_x\psi) = -\frac{\hbar}{i}\partial_y (\psi^* D_x\psi) + \psi^* D_y D_x\psi. \quad (\text{A.4})$$

O complexo conjugado dessas relações nos dá que,

$$(D_y\psi)^* (D_x\psi) = \frac{\hbar}{i}\partial_x [(D_y\psi)^* \psi] + (D_x D_y\psi)^* \psi, \quad (\text{A.5})$$

$$(D_x\psi)^* (D_y\psi) = \frac{\hbar}{i}\partial_y [(D_x\psi)^* \psi] + (D_y D_x\psi)^* \psi. \quad (\text{A.6})$$

Neste ponto, temos duas formulações para a mesma identidade, onde uma relação é o conjugado complexo da segunda. A expressão

$$\begin{aligned} |D_+\psi|^2 = |D\psi|^2 + i \left[ -\frac{\hbar}{i}\partial_x (\psi^* D_y\psi) + \psi^* D_x D_y\psi \right] \\ - \left[ -\frac{\hbar}{i}\partial_y (\psi^* D_x\psi) + \psi^* D_y D_x\psi \right], \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

torna-se,

$$\begin{aligned} |D_+\psi|^2 = |D\psi|^2 + i\psi [D_x, D_y] \psi \\ - \hbar\partial_x (\psi^* D_y\psi) + \hbar\partial_y (\psi^* D_x\psi). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

O comutador,

$$\begin{aligned} [D_x, D_y] &= \left[ \frac{\hbar}{i}\partial_x - \frac{q}{c}A_x, \frac{\hbar}{i}\partial_y - \frac{q}{c}A_y \right] \\ &= -\frac{\hbar q}{i c} (\partial_x A_y - \partial_y A_x), \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

torna-se,

$$[D_x, D_y] = -\frac{\hbar q}{i c} h_z. \quad (\text{A.10})$$

Então, é obtido,

$$\begin{aligned}
|D_+\psi|^2 &= |\vec{D}\psi|^2 - i([D_x, D_y]\psi^*)\psi \\
&\quad - \hbar\partial_x [(D_y\psi)^*\psi] + \hbar\partial_y [(D_x\psi)^*\psi]
\end{aligned}
\tag{A.11}$$

que dá expressões para  $|\vec{D}\psi|^2$ ,

e

$$\begin{aligned}
|\vec{D}\psi|^2 &= |D_+\psi|^2 + \frac{\hbar q}{c}h_z|\psi|^2 \\
&\quad + \hbar[\partial_x [(D_y\psi)^*\psi] - \partial_y [(D_x\psi)^*\psi]].
\end{aligned}
\tag{A.12}$$

Nós somamos as duas expressões e dividimos por 2 para obter,

$$\begin{aligned}
|\vec{D}\psi|^2 &= |D_+\psi|^2 + \frac{\hbar q}{c}h_z|\psi|^2 \\
&\quad + \hbar\left[\partial_x \frac{\psi^*D_y\psi + (D_y\psi)^*\psi}{2} - \partial_y \frac{\psi^*D_x\psi + (D_x\psi)^*\psi}{2}\right].
\end{aligned}
\tag{A.13}$$

Introduzindo a definição da corrente, obtemos a desejada dupla formulação da energia cinética dada pela equação 3.8

# Referências Bibliográficas

- [1] HK Onnes. The resistance of pure mercury at helium temperatures commun. *Phys. Lab. Univ. Leiden 120b*, pages 1479–81, 1911.
- [2] S. N. Song J. B. Ketterson. *Superconductivity*. Cambridge University Press, 1999.
- [3] Per F Dahl. Kamerlingh onnes and the discovery of superconductivity: The leyden years, 1911-1914. *Historical Studies in the Physical Sciences*, 15(1):1–37, 1984.
- [4] Michael Tinkham. *Introduction to superconductivity*. Courier Corporation, 1996.
- [5] Fritz London and Heinz London. The electromagnetic equations of the supraconductor. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 149, pages 71–88. The Royal Society, 1935.
- [6] S. N. Song J. B. Ketterson. *Superconductivity*. Cambridge University Press, 1999.
- [7] Vitaly L Ginzburg. Zh. vl ginzburg and ld landau. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, 20:1064, 1950.
- [8] CA Reynolds, B Serin, WH Wright, and LB Nesbitt. Superconductivity of isotopes of mercury. *Physical Review*, 78(4):487, 1950.
- [9] Alexei A Abrikosov. Magnetic properties of superconductors of the second group. *Sov. Phys.-JETP (Engl. Transl.);(United States)*, 5(6), 1957.
- [10] Lars Onsager. Magnetic flux through a superconducting ring. *Physical Review Letters*, 7(2):50, 1961.
- [11] John Bardeen, Leon N Cooper, and John Robert Schrieffer. Theory of superconductivity. *Physical Review*, 108(5):1175, 1957.

- [12] Herbert Fröhlich. Theory of the superconducting state. i. the ground state at the absolute zero of temperature. *Physical Review*, 79(5):845, 1950.
- [13] H Frohlich. Interaction of electrons with lattice vibrations. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 215, pages 291–298. The Royal Society, 1952.
- [14] Brian David Josephson. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Physics letters*, 1(7):251–253, 1962.
- [15] J George Bednorz and K Alex Müller. Possible high  $t_c$  superconductivity in the balacuo system. In *Ten Years of Superconductivity: 1980–1990*, pages 267–271. Springer, 1986.
- [16] J. R. Ashburn M. K. Wu, C. J. Torng, P. H. Hor, and Y. Q. Wang C. W. Chu R. L. Meng, Z. J. Huang. Superconductivity at 93 k in a new mixed-phase **Y-Ba-Cu-O** compound system at ambient pressure. *Physical Review Letters*, 58(9):908, 1987.
- [17] U Essmann and H Träuble. The direct observation of individual flux lines in type ii superconductors. *Physics letters A*, 24(10):526–527, 1967.
- [18] W Buckel. Superconductivity. fundamentals and applications. 3. rev. 1984.
- [19] José Aguilar Peris. Estudio termodinámico de los cambios de fase de segundo orden. *Anales de la Universidad de Murcia (Ciencias)*, 1960.
- [20] Lev Petrovich Gor'kov. Microscopic derivation of the ginzburg-landau equations in the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, 9(6):1364–1367, 1959.
- [21] Simon J Bending. Local magnetic probes of superconductors. *Advances in Physics*, 48(4):449–535, 1999.
- [22] LN Vu, MS Wistrom, and DJ Van Harlingen. Imaging of magnetic vortices in superconducting networks and clusters by scanning squid microscopy. *Applied physics letters*, 63(12):1693–1695, 1993.

- [23] Pål Erik Goa, Harald Hauglin, Michael Baziljevich, Eugene Il'yashenko, Peter L Gammel, and Tom H Johansen. Real-time magneto-optical imaging of vortices in superconducting nbse2. *Superconductor Science and Technology*, 14(9):729, 2001.
- [24] Å AF Olsen, H Hauglin, TH Johansen, PE Goa, and D Shantsev. Single vortices observed as they enter nbse 2. *Physica C: Superconductivity*, 408:537–538, 2004.
- [25] JE Sonier, JH Brewer, RF Kiefl, DA Bonn, SR Dunsiger, WN Hardy, Ruixing Liang, WA MacFarlane, RI Miller, TM Riseman, et al. Measurement of the fundamental length scales in the vortex state of yba 2 cu 3 o 6.60. *Physical review letters*, 79(15):2875, 1997.
- [26] Ch Niedermayer, EM Forgan, H Glückler, A Hofer, E Morenzoni, M Pleines, T Prokscha, TM Riseman, M Birke, TJ Jackson, et al. Direct observation of a flux line lattice field distribution across an yba 2 cu 3 o 7-  $\delta$  surface by low energy muons. *Physical review letters*, 83(19):3932, 1999.
- [27] Eric WJ Straver, Jennifer E Hoffman, Ophir M Auslaender, D Rugar, and Kathryn A Moler. Controlled manipulation of individual vortices in a superconductor. *Applied Physics Letters*, 93(17):172514, 2008.
- [28] H Suderow, I Guillamón, JG Rodrigo, and S Vieira. Imaging superconducting vortex cores and lattices with a scanning tunneling microscope. *Superconductor Science and Technology*, 27(6):063001, 2014.
- [29] Tristan Cren, Denis Fokin, François Debontridder, Vincent Dubost, and Dimitri Roditchev. Ultimate vortex confinement studied by scanning tunneling spectroscopy. *Physical review letters*, 102(12):127005, 2009.
- [30] Ten Cren, L Serrier-Garcia, François Debontridder, and D Roditchev. Vortex fusion and giant vortex states in confined superconducting condensates. *Physical review letters*, 107(9):097202, 2011.
- [31] Igor Lukyanchuk, VM Vinokur, Andreas Rydh, R Xie, MV Milošević, Ulrich Welp, M Zach, ZL Xiao, GW Crabtree, SJ Bending, et al. Rayleigh instability of confined vortex droplets in critical superconductors. *Nature Physics*, 11(1):21–25, 2015.

- 
- [32] Alfredo A Vargas-Paredes, Mauro M Doria, and José Abdala Helayël Neto. The lichnerowicz-weitzenböck formula and superconductivity. *Journal of Mathematical Physics*, 54(1):013101, 2013.
- [33] Benjamin Fine and Gerhard Rosenberger. *The fundamental theorem of algebra*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [34] Rodolpho Ribeiro Gomes, Mauro M Doria, and Antonio R de C Romaguera. Paramagnetic excited vortex states in superconductors. *Physical Review B*, 93(21):214518, 2016.
- [35] DK Finnemore, TF Stromberg, and CA Swenson. Superconducting properties of high-purity niobium. *Physical Review*, 149(1):231, 1966.
- [36] Pradip Das, CV Tomy, SS Banerjee, H Takeya, S Ramakrishnan, and AK Grover. Surface superconductivity, positive field cooled magnetization, and peak-effect phenomenon observed in a spherical single crystal of niobium. *Physical Review B*, 78(21):214504, 2008.
- [37] Daniel Bothner, Conrad Clauss, Elisabeth Koroknay, Matthias Kemmler, Tobias Gamber, Michael Jetter, Marc Scheffler, Peter Michler, Martin Dressel, Dieter Koelle, et al. The phase boundary of superconducting niobium thin films with antidot arrays fabricated with microsphere photolithography. *Superconductor Science and Technology*, 25(6):065020, 2012.