



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Modelo Espaço-Temporal para a Dinâmica da Distribuição de
Renda

Ângela de Mesquita Pereira

Dissertação de Mestrado

Recife - PE

23 de fevereiro de 2017

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Ângela de Mesquita Pereira

**Modelo Espaço-Temporal para a Dinâmica da Distribuição de
Renda**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo

**Recife - PE
23 de fevereiro de 2017**

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Ângela de Mesquita Pereira

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 07/03/2017 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Prof. Dr. Pedro Hugo de Figueirêdo
DF-UFRPE

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a Viviane Moraes de Oliveira
DF-UFRPE

Prof. Dr. Tiago Alessandro Espinola Ferreira
UFRPE

Dedico esta, bem como todas as minhas demais conquistas, a Deus a todos os meus amigos e familiares.

Agradecimientos

Resumo

A forma como os recursos se distribuem em uma sociedade ou num mercado desempenha um papel fundamental para os agentes econômicos, historicamente as primeiras investigações, deste tema, surgiram no final do século XVIII. Um dos principais objetivos do estudo das distribuições de renda de um país é determinar as desigualdades sociais implicadas em um determinado modelo econômico e nos efeitos diretos e indiretos da desigualdade sobre a sociedade. Usualmente a desigualdade na distribuição de recursos $P(m)$ é quantificada pelo índice de Gini, que é um parâmetro compreendido no intervalo $0 \leq G \leq 1$ e assume valor $G = 0$ para distribuição isonômica e $G = 1$ para máxima concentração. Nesta dissertação apresentamos uma generalização do modelo Heterogêneo e Adaptativo, afim de incorporar dois principais ingredientes. O primeiro consiste na estrutura espacial que descreve a dinâmica entre os agentes, estabelecendo dinâmicas locais de interação e o segundo a distribuição espacial de mobilidade μ que determina a adaptabilidade da taxa de gasto ω dos agentes. Como resultado, o espaço de parâmetros $[G, \omega]$ produzido pelo modelo é compatível com aquele observado em dados reais, extraídos do Banco Mundial, e a renda possui um comportamento radial decrescente em torno do agente de maior renda, em oposição ao comportamento da taxa de gasto, o que também corresponde ao padrão observado empiricamente.

Palavras-chave: Econofísica, Distribuição Espacial de Renda, Índice de Gini;

Abstract

The way as resources are distributed in a society or in a market plays a fundamental role for economic agents, historically the earliest investigations of this theme emerged in the late eighteenth century. One of the main objectives of country income distribution investigation is to determine the social inequalities implied in a given economic model and the direct and indirect effects of inequality on the society. Usually the inequality in resources distribution $P(m)$ is quantified by the Gini index, this parameter in the range $0 \leq G \leq 1$ assumes $G = 0$ for isonomic distribution and $G = 1$ for maximum the concentration. In this we present a generalization of the Heterogeneous Adaptive model, in order to incorporate two main ingredients. The first consists the spatial structure that describes the dynamics between the agents, establishing local interaction dynamics and the second the spatial distribution of mobility μ that determines the adaptability of the rate of agent consumption ω . As a result, the space of parameters $[G, \omega]$ produced by the model is compatible with that observed in real data, extracted from World Bank, and income has a decreasing radial behavior around the higher income agent as opposed to the behavior of the rate consumption also corresponds to the pattern observed empirically.

Keywords: Econophysics, Spatial Income Distribution, Gini Index

Sumário

1	Introdução	1
2	Modelos	6
2.1	Modelos Homogêneos	8
2.1.1	Modelo de Angle	8
2.1.2	Modelo de Bennati	10
2.1.3	Modelo de Chakraborti e Chakrabarti	11
2.1.4	Modelo Dragulesco e Yakovenko	12
2.2	Modelos Heterogêneos	14
2.3	Modelo Heterogêneo e Adaptativo	15
2.3.1	Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1 (MHA-1)	16
2.3.2	Modelo Heterogêneo e Adaptativo-2 (MHA-2)	16
3	Aspectos Espaciais da Distribuição de Renda	18
3.1	Modelo Heterogêneo e Adaptativo com Aspectos Espaciais	22
4	Resultados	26
4.1	Caracterização Temporal	26
4.2	Caracterização Espacial	29
5	Conclusões	38
A	Anexo	40

Lista de Figuras

1.1	Curva de Lorenz para uma distribuição de renda exponencial (curva em vermelho) e a curva preta corresponde a curva para perfeita igualdade de renda.	4
1.2	Histograma dos valores médios dos coeficientes de Gini para 132 países, bem como suas médias temporais entre os anos de 1990 à 2009 com respectivas barras de erro (subgráficos). Dados do Banco Mundial e figura extraída de [1].	4
2.1	Representação esquemática da interação entre partículas i e j que interagem trocando uma quantidade fixa de energia (Δm) em suas colisões. Reproduzida e adaptada de [2].	10
2.2	Representação esquemática da interação entre partículas (i e j) que trocam uma quantidade fixa de energia Δm por emissão ou absorção de luz com frequência bem definida. Reproduzida e adaptada de [2]	11
2.3	Representação esquemática da interação entre partículas i e j que interagem trocando uma quantidade fixa de energia (Δm) em suas colisões. Reproduzida e adaptada de [2].	13
3.1	Proporção dos 25% dos domicílios que pagam mais impostos em relação aos 25% dos domicílios que pagam menos impostos. Extraído de [3].	21
3.2	A figura (a) representa um padrão típico com cinco sítios de mobilidade nula $L_p = 5$, e a figura (b) apresenta esquematicamente as distâncias de um sítio i às regiões com baixa mobilidade.	23
3.3	Sítio arbitrário e seus oito vizinhos mais próximos, também conhecida como vizinhança de Moore.	24

4.1	Gráficos do comportamento da taxa de gasto $[\omega]$ e índice de Gini G em função do tempo, para as frações de agentes positivamente correlacionados para os seguintes valores de $q = 0, 0.5, 1$	27
4.2	Gráfico do comportamento do índice de Gini $[G]$ em função da taxa de gasto $[\omega]$	28
4.3	Gráfico comportamento do índice de Gini $[G]$ em função da taxa de gasto $[\omega]$, em comparação com as médias para o coeficiente de Gini e taxa de gasto dos 132 países, no período de 1990 à 2009 (círculos pretos).	29
4.4	Padrões da mobilidade para distintos valores q e a	30
4.5	Padrões da taxa de gasto para distintos valores de q e a	31
4.6	Padrões da renda para distintos valores de q e a	32
4.7	Padrões da taxa de gasto e renda para $q = 0.25$ e $a = 11$, com as curvas de nível da mobilidade e mesmo código de cores utilizados nas figuras 4.5 e 4.6.	33
4.8	Gráficos da renda média normalizada dos agentes localizados a uma distância r do agente com máxima renda.	34
4.9	Gráficos da Dispersão da renda média normalizada dos agentes localizados a uma distância r do agente com máxima renda.	35
4.10	Gráficos da taxa de gasto média normalizada.	36
4.11	Gráficos da dispersão da taxa de gasto média normalizada.	37

Lista de Tabelas

2.1	Tabela comparativa dos parâmetros $n(\lambda)$, $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$, para os modelos de Angle, Bennati, Chakraborti e Chakrabarti e Dragulesco e Yakovenko.	13
A.1	Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.	40
A.2	Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.	41
A.3	Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.	42
A.4	Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.	43
A.5	Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.	44
A.6	Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.	45

Capítulo 1

Introdução

O estudo de inúmeros temas interdisciplinares desenvolvidos no contexto das ciências sociais aplicadas, ciências biológicas, linguística e urbanismo vem possibilitando avanços não só na descrição e previsões dos fenômenos destas áreas, como também tem ajudado no desenvolvimento de uma série de ferramentas teóricas e experimentais para novos e velhos problemas físicos. Estes sistemas complexos [4, 5], como tem sido denominados, são compostos por muitos elementos que interagem entre si e compartilham características fundamentais como heterogeneidade, adaptabilidade, frustração e memória. Dessa forma, sua caracterização envolve o conhecimento não somente de suas partes como também as relações entre elas.

Nas últimas décadas, tem crescido consideravelmente o interesse de pesquisadores de diversas áreas em temas como mercado financeiro e distribuição de renda. Na comunidade de físicos, a área da economia originou a criação de um campo de estudo denominado econofísica [6, 7, 8]. O termo econofísica foi utilizado pela primeira vez pelo físico H.E. Stanley em 1995, na conferência *Dynamics of Complex Systems* realizada na Índia [9] e foi introduzido por analogia com termos semelhantes, como biofísica, geofísica e astrofísica, que descrevem a aplicação da física em diferentes áreas. Este novo ramo de pesquisa utiliza-se de métodos matemáticos desenvolvidos no âmbito da mecânica estatística para abordar problemas de natureza econômica. A econofísica estuda modelos com um grande número de agentes econômicos, que interagem entre si, por este motivo durante vários anos a modelagem baseada em agentes tem sido associada à econofísica. As pesquisas realizadas neste campo

foram divididas em duas abordagens computacionais diferentes: a “econofísica baseada em agentes” e a “econofísica estatística” [10]. Esta divisão é resultado dos trabalhos que ligam a física estatística aos autômatos celulares desenvolvidos por Langston [11] nos anos de 1980 [10].

A econofísica baseada em agentes e a econofísica estatística têm bases comuns, pois descrevem sistemas socioeconômicos como sistemas complexos, cujas propriedades não podem ser simplesmente derivadas ou previstas a partir do conhecimento dos estados iniciais destes sistemas. A principal diferença entre essas duas abordagens é o fato da primeira tratar de modelos microscópicos aplicados a agentes heterogêneos e de aprendizagem e a segunda utilizar principalmente agentes sem habilidade de aprendizagem, cujas interações são aleatórias. Além disso, a econofísica baseada em agentes tenta reproduzir as regularidades estatísticas observadas nos sistemas econômicos ou financeiros, já a última tenta descrever essas regularidades diretamente da evolução do sistema. Em síntese, a econofísica pode ser compreendida como uma aplicação de ferramentas usualmente do campo da mecânica estatística a temas de cunho social ou financeiro.

Um dos principais interesses de estudo da econofísica é a distribuição de renda. O modo como se processa a repartição da riqueza e dos bens socialmente produzidos, entre os habitantes de um país ou num mercado, desempenha papel fundamental para os agentes econômicos. O estudo da distribuição de renda de um país contribui para melhor compreensão das desigualdades sociais implicadas por um determinado modelo econômico e na proposição de possíveis políticas públicas que minorem seus efeitos, e no desenvolvimento da economia.

Apesar das primeiras investigações sobre o tema terem ocorrido no final do século XVIII, somente no final do século XIX, uma importante contribuição veio através do economista e matemático Vilfredo Pareto [12], que analisou dados de renda de alguns países europeus e apontou que a distribuição desta quantidade em uma sociedade apresentava uma forma em lei de potência, com um expoente α que parecia não depender das diferentes condições econômicas dos países. Embora a lei proposta por Pareto mostrasse boa concordância para o regime de grandes intervalos de renda, ela divergia para médios e pequenos intervalos. A partir da década de 1960 por intermédio de inúmeros estudos empíricos verificou-se que o expoente para cauda da distribuição de renda não era universal [13, 14]. Com isso, diversos

modelos foram propostos para obtenção de novas distribuições em consonância com dados reais.

Para quantificar a distribuição de recursos na economia foram criados diversos índices, dentre os mais conhecidos encontra-se o índice de Gini ou coeficiente de Gini. Ele é uma medida estatística da desigualdade desenvolvida pelo italiano Corrado Gini em 1912 [15, 16, 17], usualmente utilizada para indicar o grau de concentração de renda de um sistema econômico. Esse parâmetro está compreendido no intervalo $0 \leq G \leq 1$ que assume valor $G = 0$ para distribuição totalmente isonômica e $G = 1$ para máxima concentração.

O coeficiente de Gini é obtido a partir da curva de Lorenz, que é a forma padrão para representar todos os dados da distribuição de renda $P(r)$. Ele é calculado analiticamente através de duas quantidades paramétricas [18]:

$$X(m) = \frac{\int_0^m P(r)dr}{\int_0^\infty P(r)dr}, \quad (1.1)$$

$$Y(m) = \frac{\int_0^m rP(r)dr}{\int_0^\infty rP(r)dr}, \quad (1.2)$$

onde $X(m)$ representa a fração de agentes com recurso inferior a m e $Y(m)$ a fração de recursos associada a população de $X(m)$. Na figura 1.1, a curva vermelha (curva de Lorenz) representa a distribuição de renda exponencial, já a curva preta corresponde a distribuição de renda perfeitamente igualitária. A região entre as curvas é a área de concentração de renda e a região abaixo da curva de cor preta é denominada de área de máxima concentração. O índice de Gini é definido como a razão entre a área de concentração de renda e a área de máxima concentração de renda, podendo ser escrito da seguinte forma,

$$G \equiv 2 \int_0^1 (X - Y) dX. \quad (1.3)$$

Para o caso particular da distribuição exponencial o índice de Gini tem valor igual a $1/2$.

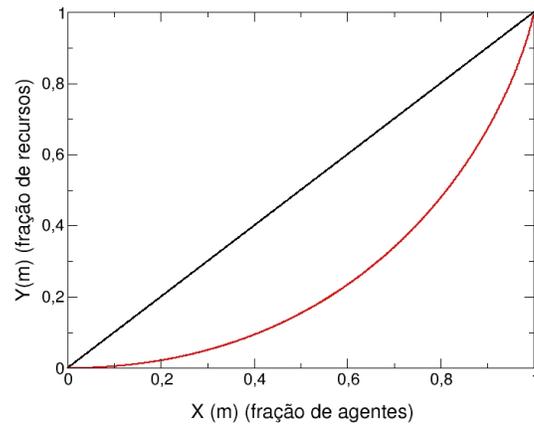


Figura 1.1: Curva de Lorenz para uma distribuição de renda exponencial (curva em vermelho) e a curva preta corresponde a curva para perfeita igualdade de renda.

Embora analiticamente o índice de Gini esteja compreendido no intervalo $0 \leq G \leq 1$ dados do Banco Mundial apontam que os valores reais associados a este parâmetro estão concentrados numa subregião. Na figura 1.2 apresentamos um histograma com as médias temporais do índice de Gini de 132 países, os dados foram obtidos do Banco Mundial no período de 1990 à 2009, com representantes de todos os continentes [19, 20], enquanto que, no subgráfico exibimos os valores específicos da média temporal de cada país com suas respectivas barras de erro [1].

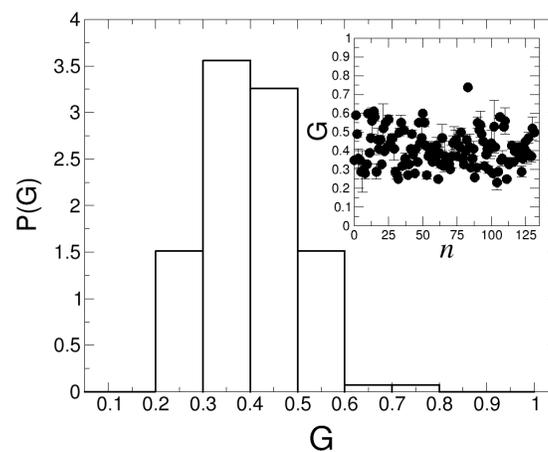


Figura 1.2: Histograma dos valores médios dos coeficientes de Gini para 132 países, bem como suas médias temporais entre os anos de 1990 à 2009 com respectivas barras de erro (subgráficos). Dados do Banco Mundial e figura extraída de [1].

Podemos observar que o intervalo no qual se encontram os valores reais destes dados, para este parâmetro correspondem a $\bar{G}_{min} = 0.23 \pm 0.04$ (República Eslovaca) e $\bar{G}_{max} = 0.74 \pm 0.04$ (República da Namíbia) respectivamente [1].

Com o desenvolvimento de recursos computacionais de alto desempenho modelos estatísticos de muitos agentes, que incluem em sua dinâmica taxas de gasto, tem sido propostos frequentemente como forma de descrever sistemas econômicos fechados e que podem reproduzir algumas características da distribuição de renda, como por exemplo o índice de Gini. Nesta dissertação estamos interessados em estudar sistemas econômicos compostos por muitos agentes, que incorporam características de heterogeneidade e adaptabilidade nas taxas de consumo de recursos, outra importante contribuição deste estudo é a investigação de alguns aspectos da distribuição espacial de renda.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, apresentamos uma breve revisão dos principais modelos encontrados na literatura [21, 9] aplicados na investigação do processo de distribuição de renda de diversos países, e suas principais características.

No capítulo 3, abordamos alguns aspectos da distribuição espacial de renda da perspectiva econômica e apresentamos uma generalização do modelo heterogêneo adaptativo [22], que engloba aspectos espaciais da distribuição de renda.

Já no capítulo 4, apresentamos os resultados e a discussão do nosso trabalho, assim como comparamos os resultados obtidos através do modelo heterogêneo adaptativo com os dados reais de países retirados do Banco Mundial.

E por fim, no capítulo 5 expomos a conclusão, as perspectivas, e considerações finais de nosso estudo.

Capítulo 2

Modelos

As investigações de como os recursos se distribuem em uma sociedade ou mercado historicamente surgiram no final do século XVIII. Uma das mais importantes contribuições surgiu no final do século XIX através do economista e matemático Vilfredo Pareto [12], que investigou dados de renda de diversos países europeus e indicou que a distribuição de renda e riqueza em uma sociedade apontava para uma distribuição em forma de lei de potência, descrita da seguinte expressão:

$$P(m) \propto m^{-(1+\nu)}, \quad (2.1)$$

onde m representa a quantidade de recurso e ν é o denominado expoente de Pareto. Ainda segundo Pareto, a forma da distribuição e o expoente não pareciam depender das condições econômicas dos países. Mais tarde foi percebido que a lei proposta não apresentava boa concordância para intervalos pequenos e médios de rendas, porém para grandes intervalos de rendas os resultados eram adequados.

Evidências atuais indicam que a distribuição de renda e riqueza estão divididas em dois regimes [14], um para pequenas rendas e outro para altas rendas. No regime de pequenas rendas a distribuição é bem caracterizada por uma distribuição tipo Gama, e para altas rendas é bem descrita por uma lei de potência, como foi encontrado por Pareto. Quando foi descoberto que o expoente para cauda da distribuição de renda não era universal, diversos modelos foram desenvolvidos com a intenção de se obter novas distribuições de renda mais adequadas aos dados reais, para determinar as desigualdades e possíveis políticas públicas

que suavizassem seus efeitos na sociedade. De forma geral a desigualdade na distribuição de renda é quantificada pelo índice de Gini [15], e este parâmetro assume valor mínimo $G = 0$, para uma distribuição totalmente isônomica de renda, e valor máximo $G = 1$, na situação de máxima concentração.

Com o desenvolvimeto de novos recursos computacionais, de alto desempenho, modelos estatísticos de muitos agentes que incluem em sua dinâmica taxas de gasto têm sido propostos como forma de descrever tais sistemas econômicos. Estes sistemas são baseados em modelos microscópicos geralmente construídos para descrever sistemas físicos, desse modo, é possível fazer analogia entre riqueza e energia, duas dessas classes foram inseridas com a intenção de reproduzir sistemas econômicos.

Nos modelos considerados, é assumido que o sistema é composto por N agentes $\{i = 1, 2, \dots, N\}$ e cada um destes possui uma quantidade de recursos m_i ($m_i > 0$), enquanto que, a quantidade total de recursos

$$\sum_{i=1}^N m_i = M, \quad (2.2)$$

é conservada. Cada agente possui um parâmetro de troca ω ($0 < \omega < 1$), que determina a fração da atual quantidade de recursos que pode ser transferida para outro agente, que é escolhido aleatoriamente entre os $(N - 1)$ agentes remanescentes. De forma equivalente, é definido um parâmetro chamado poupança $\lambda_i = 1 - \omega_i$ ($0 < \lambda_i < 1$) como sendo a fração mínima de recursos preservada em cada transação. O processo continua até que todos os agentes tenham a oportunidade de realizar ao menos uma operação.

A dinâmica acontece de acordo com as equações:

$$\begin{cases} \Delta m = \omega_i m_i(t) - \omega_j m_j(t) \\ m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m \\ m_j(t+1) = m_j(t) + \Delta m, \end{cases} \quad (2.3)$$

podemos entender Δm como o fluxo efetivo de recursos em cada transação. Diferente dos sistemas econômicos reais, este tipo de sistema é dito fechado, pois ele não permite a entrada e saída de agentes e de recursos no sistema. Os modelos também podem ser classificados matematicamente como simétrico e assimétrico. Um modelo é dito simétrico quando a

probabilidade ϵ com que um agente i ou j perde uma quantidade de recursos é a mesma e a quantidade de recursos trocados segue a relação

$$\Delta m(m_i, m_j; \epsilon) = -\Delta m(m_j, m_i; \epsilon). \quad (2.4)$$

Do mesmo modo um modelo é dito assimétrico quando ϵ é fixo e a quantidade de recursos trocada satisfaz a relação

$$\Delta m(m_i, m_j; \epsilon) \neq -\Delta m(m_j, m_i; \epsilon). \quad (2.5)$$

Da perspectiva do fluxo de recursos um modelo é considerado unidirecional se em uma interação, entre dois agentes i e j , a quantidade efetiva de recursos Δm for inteiramente cedida por um agente e adquirida por outro.

Essencialmente existem duas formas de modelar computacionalmente uma distribuição de renda entre os países ou indivíduos num mercado, esses modelos são classificados como homogêneos [2, 23, 24] ou heterogêneos [2, 14].

2.1 Modelos Homogêneos

Primeiramente iremos tratar dos modelos homogêneos, onde a fração de troca ω (taxa de gasto) é igual para todos os agentes.

2.1.1 Modelo de Angle

O modelo proposto por J. Angle em 1983 [23, 14, 2], busca descrever como uma distribuição desigual de recursos emerge a partir de trocas individuais entre agentes econômicos que possuem inicialmente uma mesma quantidade de recursos. Da perspectiva matemática, ele é classificado como um modelo assimétrico e unidirecional. Além disso, possui uma dinâmica não-linear[2] .

A variação da quantidade de recursos, para o modelo de Angle, segue a seguinte lei:

$$\Delta m = \eta(m_j - m_i)\epsilon\omega m_i - [1 - \eta(m_j - m_i)]\epsilon\omega m_j, \quad (2.6)$$

onde η e ϵ são variáveis aleatórias. O parâmetro ϵ está compreendido no intervalo ($0 < \epsilon < 1$), e pode ser uniforme ou ter uma certa probabilidade de distribuição. Já η é uma variável dicotômica, que é responsável pelo fluxo de recursos e por garantir a unidirecionalidade da dinâmica. η pode assumir dois valores: com a probabilidade p_0 , $\eta(m > 0) = +1$ ou com probabilidade $1 - p_0$, $\eta(m < 0) = 0$. Quando η é igual a 1 é produzido um fluxo de recursos do agente i para o agente j , já quando η é igual a 0 é produzido um fluxo do agente j para o agente i . No caso onde o agente que perde recurso é o i -ésimo, o módulo da variação de recursos Δm é dado por uma fração aleatória ϵ da quantidade de recursos m_i ,

$$|\Delta m| = \epsilon \omega m_i \quad (2.7)$$

O modelo de Angle apresenta um caso especial quando é fixado $p_0 = 1/2$, e nesta configuração todos os indivíduos tem a mesma chance de ganhar ou perder recursos. Para esse caso específico o resultado da dinâmica é uma distribuição Gama:

$$P(m) = \beta \gamma_n(\beta m) = \frac{\beta}{\Gamma(n)} (\beta m)^{n-1} \exp(-\beta m), \quad (2.8)$$

onde

$$n \equiv \frac{D}{2} = \frac{1 + 2\lambda}{2(1 - \lambda)} = \frac{3 - 2\omega}{2\omega}, \quad (2.9)$$

β faz o papel do inverso da renda média, e as variáveis n e D são vistas como parâmetros referentes à dimensão do sistema [25]. Para $n < 1$, ou seja, $\omega > 3/4$ ou $\lambda < 1/4$, a distribuição Gama diverge quando $m \rightarrow 0$.

Um análogo mecânico do modelo de Angle, é um modelo de interação de gotas em uma precipitação. Como consequência das interações mútuas ou das colisões entre as gotas, uma gota que possui originalmente uma massa m_i pode se fragmentar resultando em uma massa final $m_i(t+1) = m_i(t) - \Delta m$, produzindo um fragmento de massa Δm , que pode ser absorvido por outra gota de massa m_j , resultando numa massa $m_j(t+1) = m_j(t) + \Delta m$. O análogo mecânico do modelo de Angle está simbolicamente retratado na figura 2.1.

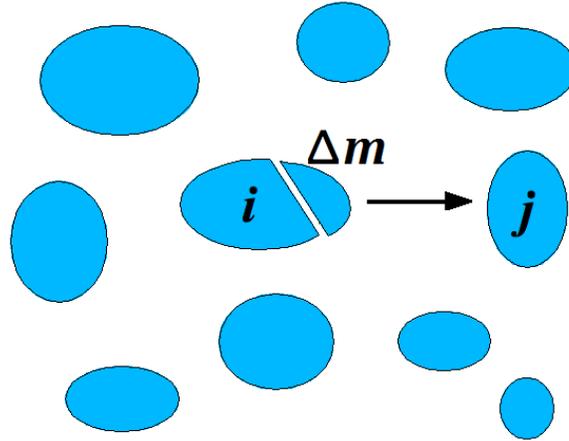


Figura 2.1: Representação esquemática da interação entre partículas i e j que interagem trocando uma quantidade fixa de energia (Δm) em suas colisões. Reproduzida e adaptada de [2].

2.1.2 Modelo de Bennati

O modelo introduzido por E. Bennati [2, 14], é classificado do ponto de vista matemático como um modelo simétrico e unidirecional. Neste modelo os agentes interagem e realizam trocas de quantidades contantes de recursos Δm . Se, após as transações a quantidade de recursos for positiva, ou seja, $[m_i(t+1), m_j(t+1) \geq 0]$, o sistema é descrito pela equação 2.3, onde Δm é

$$\Delta m(t+1) = \Delta m(t) \quad (2.10)$$

neste caso o fluxo de recursos não depende de uma taxa de gasto. Quando $[m_i(t+1), m_j(t+1) \leq 0]$ não ocorre a interação. Uma vez que a riqueza pode apenas variar em uma quantidade constante Δm , esse modelo é análogo a um conjunto de partículas que trocam energia por emissão e absorção de quanta de luz, para uma frequência constante $\nu_0 = \Delta m_0/\hbar$, como podemos ver na figura 2.2 onde está a representação da interação de um conjunto de partículas “trocando um quanta de luz” Δm .

Analiticamente, o modelo de Bennati é bem descrito pela distribuição de equilíbrio exponencial ou distribuição de Gibbs [25, 21]

$$P(m) = \frac{\exp(-m/\langle m \rangle)}{\langle m \rangle}, \quad (2.11)$$

este modelo é estatisticamente equivalente ao modelo de Angle para $D/2 = n = 1$, a diferença entre eles é que o modelo de Bennati é aditivo, isto é, Δm é independente de m , e o modelo

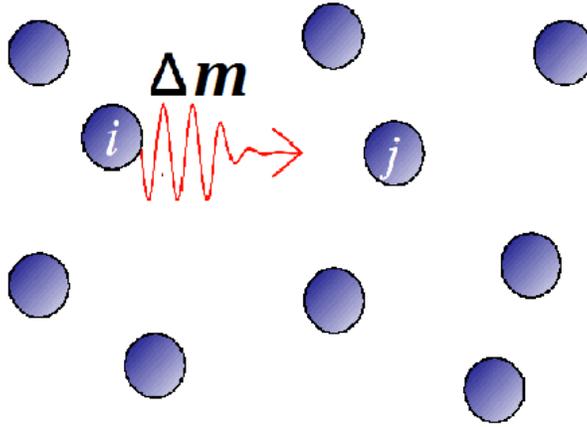


Figura 2.2: Representação esquemática da interação entre partículas (i e j) que trocam uma quantidade fixa de energia Δm por emissão ou absorção de luz com frequência bem definida. Reproduzida e adaptada de [2]

de Angle é multiplicativo $\Delta m \propto m$.

2.1.3 Modelo de Chakraborti e Chakrabarti

O modelo proposto por Chakraborti e Chakrabarti [14, 26], segue uma dinâmica de troca semelhante aos dos modelos anteriores, mas tendo como regra geral as seguintes expressões:

$$\begin{cases} m_i(t+1) = \lambda m_i + \epsilon(1-\lambda)(m_i + m_j) \\ m_j(t+1) = \lambda m_j + \bar{\epsilon}(1-\lambda)(m_i + m_j) \end{cases} \quad (2.12)$$

onde $\bar{\epsilon} = 1 - \epsilon$ descreve uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, 1)$. Ela é equivalente a equação 2.3 caso

$$\begin{cases} \Delta m = \omega(\bar{\epsilon}\omega_i - \epsilon m_j) - (1-\lambda)(\bar{\epsilon}\omega_i - \epsilon m_j) \\ \bar{\epsilon} + \epsilon = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Assim como no modelo de Angle, a distribuição de recursos no equilíbrio é descrita por uma distribuição Gama, como na equação 2.8, porém o parâmetro n é dado por

$$n_c(\omega) \equiv n(\lambda) = \frac{D(\lambda)}{2} = \frac{1+2\lambda}{1-\lambda} = \frac{3-2\omega}{\omega}. \quad (2.14)$$

Isto é exatamente o dobro do parâmetro do modelo de Angle simétrico para $p_0 = 1/2$, ou

seja $n_c(\omega) = 2n_A(\omega)$. Baseado na equação 2.13, nota-se que a densidade de probabilidade é sempre finita para $m \rightarrow 0$, mesmo para o valor mais alto da taxa de gasto $\omega = 1$, ou correspondentemente para o menor valor do parâmetro de poupança $\lambda = 0$, a distribuição não diverge e é igual à função exponencial $P(m) = \beta \exp(-\beta m)$. Embora exista uma relação entre as distribuições de equilíbrio do modelo de Angle simétrico e do modelo de Chakraborti e Chakrabarti, são observadas algumas diferenças importantes:

- O modelo de Chakraborti e Chakrabarti não é unidirecional, a riqueza flui do i -ésimo para o j -ésimo agente e vice-versa, ao contrário do modelo de Angle.
- O modelo é linear do ponto de vista da transferência de recurso, enquanto que, a unidirecionalidade do modelo de Angle implica em uma dependência não-linear das riquezas dos agentes.
- No modelo Chakraborti e Chakrabarti o componente estocástico está apenas associado ao parâmetro ϵ .

A analogia mecânica do modelo Chakraborti e Chakrabarti pode ser dada através de um sistema harmônico com $D = 2n$ graus de liberdade, ou em um gás ideal em $D = 2n$ dimensões.

2.1.4 Modelo Dragulesco e Yakovenko

O modelo de Dragulesco e Yakovenko, pode ser visto como uma reorganização aleatória da quantidade inicial total de recursos $x_i + x_j$,

$$\begin{cases} m_i(t+1) = \epsilon(m_i(t) + m_j(t)) \\ m_j(t+1) = \epsilon(m_i(t) + m_j(t)) \\ \bar{\epsilon} + \epsilon = 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

onde a quantidade de fluxo de recurso Δm é dada pela seguinte equação

$$\Delta m = \bar{\epsilon}m_i - \epsilon m_j. \quad (2.16)$$

Os parâmetros ϵ e $\bar{\epsilon}$ são números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $(0,1)$. Modelo de Dragulesco pode ser considerado como um caso particular do modelo Chakraborti

e Chakrabarti para o caso $\lambda = 0$ ($\omega = 1$). Assim como nos modelos anteriores, para $n = 1$, a distribuição no equilíbrio é bem descrita por uma densidade puramente exponencial [2]. Um análogo mecânico para esse modelo é descrito por um gás, no qual as partículas colidem entre si trocando energia a cada colisão, como ilustrado na figura 2.3. A figura representa a interação dessas partículas trocando energia, i e j representam as partículas que trocam energia Δm em suas colisões.

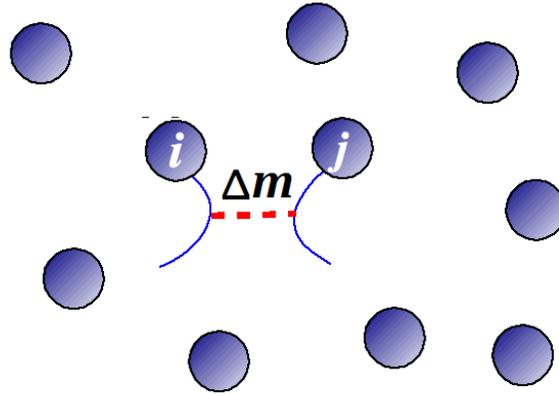


Figura 2.3: Representação esquemática da interação entre partículas i e j que interagem trocando uma quantidade fixa de energia (Δm) em suas colisões. Reproduzida e adaptada de [2].

Na tabela 2.1 temos um quadro comparativo entres os modelos homogêneos visto nessa seção.

Modelo	$n(\lambda)$	$\tilde{\omega}_i$	$\tilde{\omega}_j$
Angle	$\frac{3-2\omega}{2\omega}$	$\eta(m_j - m_i)\epsilon$	$(1 - \eta(m_j - m_i))\epsilon$
Bennati	1	ϵ	$(1 - \epsilon)$
Chakraborti e Chakrabarti	$\frac{3-2\omega}{\omega}$	$\epsilon(1 - \lambda_i)$	$(1 - \epsilon)(1 - \lambda_i)$
Dragulesco e Yakovenko	1	ϵ	$(1 - \epsilon)$

Tabela 2.1: Tabela comparativa dos parâmetros $n(\lambda)$, $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$, para os modelos de Angle, Bennati, Chakraborti e Chakrabarti e Dragulesco e Yakovenko.

2.2 Modelos Heterogêneos

Nessa seção vamos tratar dos modelos não homogêneos (heterogêneos), isto é, modelos em que é atribuído para cada agente um valor diferente da taxa de gasto ω , que está distribuído uniformemente no intervalo $[0,1)$. As formulações dos modelos heterogêneos podem ser obtidas diretamente das equações para os casos homogêneos que foram discutidas nas seções anteriores. Isso pode ser feito substituindo o termo $\omega m_i(\lambda m_i)$ por $\omega_i m_i(\lambda_i m_i)$ onde o conjunto de parâmetros ω_i (λ_i) é constante no tempo e característico de cada agente. A reformulação do modelo de Angle e Chakraborti e Chakraborti tem como resultado da sua dinâmica uma distribuição exponencial para valores intermediárias de renda, e uma distribuição lei de potência para altos valores de recursos como segue a equação

$$P(m) \propto \frac{1}{m^{1+\nu}}. \quad (2.17)$$

É possível reformular os modelos multiplicativos vistos na seção anterior, não incluindo o modelo de Bennati que é aditivo, eles podem ser reescritos de acordo com a equação básica 2.3 [2], com o termo de fluxo de recurso dado por

$$\Delta m = \tilde{\omega}_i m_i - \tilde{\omega}_j m_j, \quad (2.18)$$

Onde $\tilde{\omega}_i m_i$ e $\tilde{\omega}_j m_j$ são variáveis estocásticas que representam a porcentagem real de recurso perdida pelos i -ésimo e j -ésimo agentes. As variáveis $\tilde{\omega}_i m_i$ e $\tilde{\omega}_j m_j$ são definidas como segue para os vários casos:

- No modelo de Angle, $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$ são funções não-lineares e independentes dos recursos dos agentes m_i e m_j e são escritas segundo as equações:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i = \eta(1 - \lambda_i) \equiv \epsilon \omega_i \\ \tilde{\omega}_j = (1 - \epsilon)(1 - \lambda_j) \equiv (1 - \epsilon)\omega_j \end{cases} \quad (2.19)$$

onde ϵ é uma variável aleatória com uma densidade $g(\epsilon)$, usualmente $U[0, 1]$ e $\eta(m > 0) = 1$ com probabilidade p_0 e $\eta(m < 0) = 0$ com probabilidade $1 - p_0$.

- Para o modelo Chakraborti e Chakrabarti podemos escrever $\tilde{\omega}_i$ e $\tilde{\omega}_j$ como [2] :

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_i = \eta(m_j - m_i)\epsilon\omega_i \\ \tilde{\omega}_j = \eta(m_i - m_j)\epsilon\omega_j \end{cases} \quad (2.20)$$

Onde ϵ é uma variável aleatória uniforme distribuída (0,1) e $\tilde{\omega}_i$ é um número aleatório uniforme que pode assumir valores no intervalo $(0, \omega_i]$.

- O modelo de Dragulesco e Yakovenko é obtido quando $\tilde{\omega}_i \rightarrow 1$ [2].

2.3 Modelo Heterogêneo e Adaptativo

Os modelos tratados nas seções anteriores possuem parâmetros que são regulados de maneira exógena, em particular a taxa de gasto de cada agente, ao próprio sistema. Como forma de contornar essa particularidade foi introduzido um modelo microscópico [22], em que a troca de recursos está sujeita a um processo adaptativo, onde a taxa de gasto pode ser regulada individualmente por cada agente, em função da variação de sua quantidade de recursos. No Modelo Heterogêneo e Adaptativo, o sistema econômico é fechado e composto por N agentes $i = 1, 2, \dots, N$, onde cada destes possui uma quantidade de recursos $m_i > 0$, e a soma total da quantidade de recursos no sistema é

$$M = \sum_i^N m_i. \quad (2.21)$$

A taxa de gasto ω_i ($0 < \omega_i \leq 1$), é o que determina a quantidade de recursos que será transferida do agente i para um j , que é escolhido aleatoriamente entre os $N - 1$ agentes restantes, a cada passo de tempo Monte Carlo, a taxa de gasto é atualizada de acordo com sua renda e de um fator denominado inércia μ_i ($\mu_i = 0$ ou $\mu_i = 1$) associado a cada agente. O parâmetro μ_i pode ser entendido como a capacidade de um agente de modificar sua taxa de gasto como resposta a mudanças externas. Após cada interação, a quantidade de recursos obtida por cada agente segue as seguintes equações,

$$\begin{cases} m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m_{ij} \\ m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m_{ij} \\ \Delta m_{ij} = \omega_j m_j - \omega_i m_i. \end{cases} \quad (2.22)$$

O Modelo Heterogêneo e Adaptativo é caracterizado de duas formas possíveis, como função da variação percentual de recursos α_i dos agentes

$$\alpha \equiv \frac{m_i(t+1)}{m_i(t)}, \quad (2.23)$$

essas duas formas foram denominadas respectivamente de Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1 e Modelo Heterogêneo e Adaptativo-2, que serão detalhados a seguir.

2.3.1 Modelo Heterogêneo e Adaptativo-1 (MHA-1)

No modelo MHA-1 após uma interação o agente preserva uma fração da quantidade de recursos, caso a quantidade de recursos restante seja $m_i(t+1) < m_i(t)$, isto é, se $(\alpha < 1)$, haverá uma diminuição na taxa de gasto desse agente $\omega_i(t+1) < \omega_i(t)$. Caso ocorra o contrário, quer dizer, se $m_i(t+1) > m_i(t)$ ($\alpha \geq 1$), haverá um aumento na taxa de gasto do agente $\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$ na próxima interação. A principal peculiaridade do modelo MHA-1 são os parâmetros da renda $m_i(t)$ e da taxa de gasto $\omega_i(t)$ que estão positivamente correlacionados. Esse comportamento é descrito matematicamente pelas equações,

$$\omega_i(t+1) = \begin{cases} \alpha\omega_i(t), & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha}\omega_i(t) + (1 - \frac{1}{\alpha}), & \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Podemos identificar algumas situações limites para este modelo:

1. Se após uma transação um agente possuir $m_i(t+1) \gg m_i(t)$, seu comportamento será aumentar sua taxa de gasto para $\omega_i \approx 1$.
2. Se depois de uma transação o agente possuir $m_i(t+1) = m_i(t)$, sua atitude será manter sua taxa de gasto $\omega_i(t+1) = \omega_i(t)$.
3. Por fim, se após uma negociação acontecer que $m_i(t+1) \ll m_i(t)$, sua reação será diminuir sua taxa de gasto para $\omega_i(t+1) \approx 0$.

2.3.2 Modelo Heterogêneo e Adaptativo-2 (MHA-2)

Neste modelo, se após uma negociação o agente possuir uma renda $m_i(t+1) < m_i(t)$, ou seja, se $\alpha_i \geq 1$, ocorrerá um aumento na sua taxa de gasto $\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$. Caso aconteça

o contrário, se após uma negociação $m_i(t+1) \geq m_i(t)$ a reação do agente também será aumentar sua taxa de gasto $\omega_i(t+1) > \omega_i(t)$ para a próxima interação. Na situação onde $\alpha < 1$ os parâmetros renda m_i e taxa de gasto ω_i são negativamente correlacionados e no caso onde $\alpha \geq 1$ os parâmetros são positivamente correlacionados, e esse comportamento é descrito pelas equações:

$$\omega_i(t+1) = \begin{cases} \alpha\omega_i(t) + (1-\alpha), & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha}\omega_i(t) + (1-\frac{1}{\alpha}), & \alpha \geq 1. \end{cases} \quad (2.25)$$

Semelhante ao modelo MHA-1, o modelo MHA-2 também apresenta algumas situações limites:

1. Após uma transação, se um agente possuir renda $m_i(t+1) \gg m_i(t)$, seu comportamento será aumentar a sua taxa de gasto para $\omega_i(t+1) \approx 1$.
2. Se, após a negociação, o agente possuir renda $m_i(t+1) = m_i(t)$, a reação do agente é manter sua taxa de gasto $\omega_i(t+1) = \omega_i(t)$.
3. Finalmente após a transição o agente tiver renda $m_i(t+1) \ll m_i(t)$, sua atitude será aumentar a sua taxa de gasto $\omega_i(t+1) \approx 1$.

Neste capítulo revisamos os principais modelos existentes na literatura, no próximo capítulo iremos discutir alguns aspectos da distribuição espacial de renda sob a ótica econômica, bem como apresentar uma generalização do modelo heterogêneo adaptativo que investiga tais características.

Capítulo 3

Aspectos Espaciais da Distribuição de Renda

No capítulo 2 foram apresentados os principais modelos existentes na literatura, que consideram a evolução temporal da distribuição de recursos, com a intenção de entendermos os mecanismos que produzem as distribuições de renda em economias fechadas para diferentes escalas de tempo e regimes. Uma grande classe de modelos pode ser encontrada na literatura desde aqueles que incorporam aspectos espaciais e topológicos do sistema econômico [27, 28] até aqueles que utilizam equações diferenciais com o objetivo de descrever o regime estacionário da distribuição [29]. Neste capítulo vamos abordar alguns aspectos da distribuição espacial de renda da perspectiva econômica e apresentar uma generalização do modelo heterogêneo e adaptativo [22] que incorpora aspectos espaciais da distribuição de renda e riqueza.

A desigualdade de renda é uma característica importante de muitos países em desenvolvimento, no entanto ainda não se chegou a um entendimento sobre o que a causa e sobre quais políticas públicas, eficazes, podem vir a reduzi-la. Algumas evidências mostram que a desigualdade espacial nos países em desenvolvimento e estados parece aumentar com o rápido crescimento econômico [30, 3, 31].

A desigualdade na distribuição de renda tem sido objeto de grande atenção na pesquisa econômica, inúmeros livros e artigos foram publicados usando medidas familiares para inves-

tigar a dimensão da desigualdade de renda. Esta propriedade é geralmente avaliada através de uma série de métodos diferentes e embora a aplicação de métodos espaciais tenha uma longa tradição no planejamento urbano, os economistas têm reconhecido a aplicabilidade destes métodos em sua área de conhecimento apenas recentemente [32]. O crescente número de estudos com uma perspectiva espacial mostram evidências de uma mudança de paradigma para se pensar espacialmente na economia. Contudo, o uso de métodos espaciais para explicar a desigualdade na distribuição regional de renda tem sido aplicado em um pequeno número de países devido a escassez dados.

Para investigar a desigualdade espacial da distribuição de renda os economistas costumam utilizar um conjunto de dados fiscais individuais de contribuintes e informações geográficas [32, 33, 34, 31, 3, 35, 36], uma vez que esses dados permitem a investigação dos efeitos da desigualdade. Além disso, eles utilizam regressões espaciais econométricas para quantificar os efeitos entre os níveis de renda e medidas de desigualdade, como o coeficiente de Gini. Contudo, essas medidas desprezam a questão espacial e potenciais efeitos de vizinhança que podem levar a resultados tendenciosos [37].

Alguns estudos investigam quais fatores socioeconômicos correlacionam-se com a distribuição de renda em nível regional, e com isso exploram as implicações da desigualdade social nesta escala e ampliam a análise considerando os efeitos espaciais de vizinhança na desigualdade. Segundo alguns economistas, a desigualdade de renda e a segregação espacial estão ligadas principalmente pelo sistema habitacional, onde os grupos que possuem maior rendimento podem superar os grupos de menor rendimento na competição por melhores vizinhanças [32, 38]. Isso pode levar a alguns efeitos de *feedback* positivo, uma vez que as famílias mais ricas podem produzir impactos positivos na vizinhança [32, 39]. O progressivo distanciamento espacial, juntamente com as crescentes desigualdades de renda entre regiões é considerada responsável pelo agravamento da coesão social e limitam o sucesso das políticas que promovem a redistribuição de renda [32].

Um típico exemplo de como é feita a análise espacial da distribuição de renda, é o estudo feito por John P. Shelnutt e Vincent W. Yao [3] nos condados do estado do Arkansas. Usando dados de declarações de imposto de renda individuais, os autores foram capazes de construir uma medida alternativa de desigualdade de renda. Eles usaram a proporção φ de 25%

dos domicílios (famílias) que pagam mais impostos com relação aos 25% que pagam menos impostos, esses dados fornecem medidas relativamente válidas da razão de famílias ricas e pobres. A proporção φ faz uma conexão com o índice de Gini, que na prática costuma comparar os 20% mais pobres com os 20% mais ricos [16]. Segundo essa proporção a diferença de renda se estreita quanto maior o número de famílias ricas e menor o número de famílias pobres, já na situação contrária a diferença de renda se amplia. A figura 3.1 representa a distribuição espacial da desigualdade de renda, usando esta metodologia, dos 75 condados do Arkansas no ano de 2003.

No mapa existem seis condados cuja proporção é superior a 1, e os condados das regiões norte e oeste geralmente tem baixa desigualdade de renda, bem como um baixo nível de renda. Ainda segundo os autores, no estado do Arkansas o rendimento é distribuído mais desigualmente nas porções central e noroeste do estado e em alguns condados na parte sul do estado. Eles afirmam, que o padrão espacial está positivamente correlacionado com o crescimento econômico e que o padrão da desigualdade é influenciado por outros fatores, como por exemplo, nível de instrução, distribuição demográfica e condições do mercado de trabalho. Os resultados preliminares apontaram para o crescimento da área e concentração urbana como principais impulsionadores da desigualdade de renda e sua distribuição espacial.

É importante perceber que as proporções diminuem de modo ligeiramente isotrópico em torno dos condados de máxima proporção, como uma estrutura de camadas. Isso é mais evidente observando os condados centrais, em azul, de máxima proporção ($0.87 \leq \varphi \leq 1.35$), cercados pelos condados em amarelo ($0.61 \leq \varphi \leq 0.86$), de proporção intermediária seguidos pelos condados de cor rosa ($0.42 \leq \varphi \leq 0.60$).

Ratio of Households in the Top 25 Percent to the Bottom 25 Percent of Tax Brackets, 2003

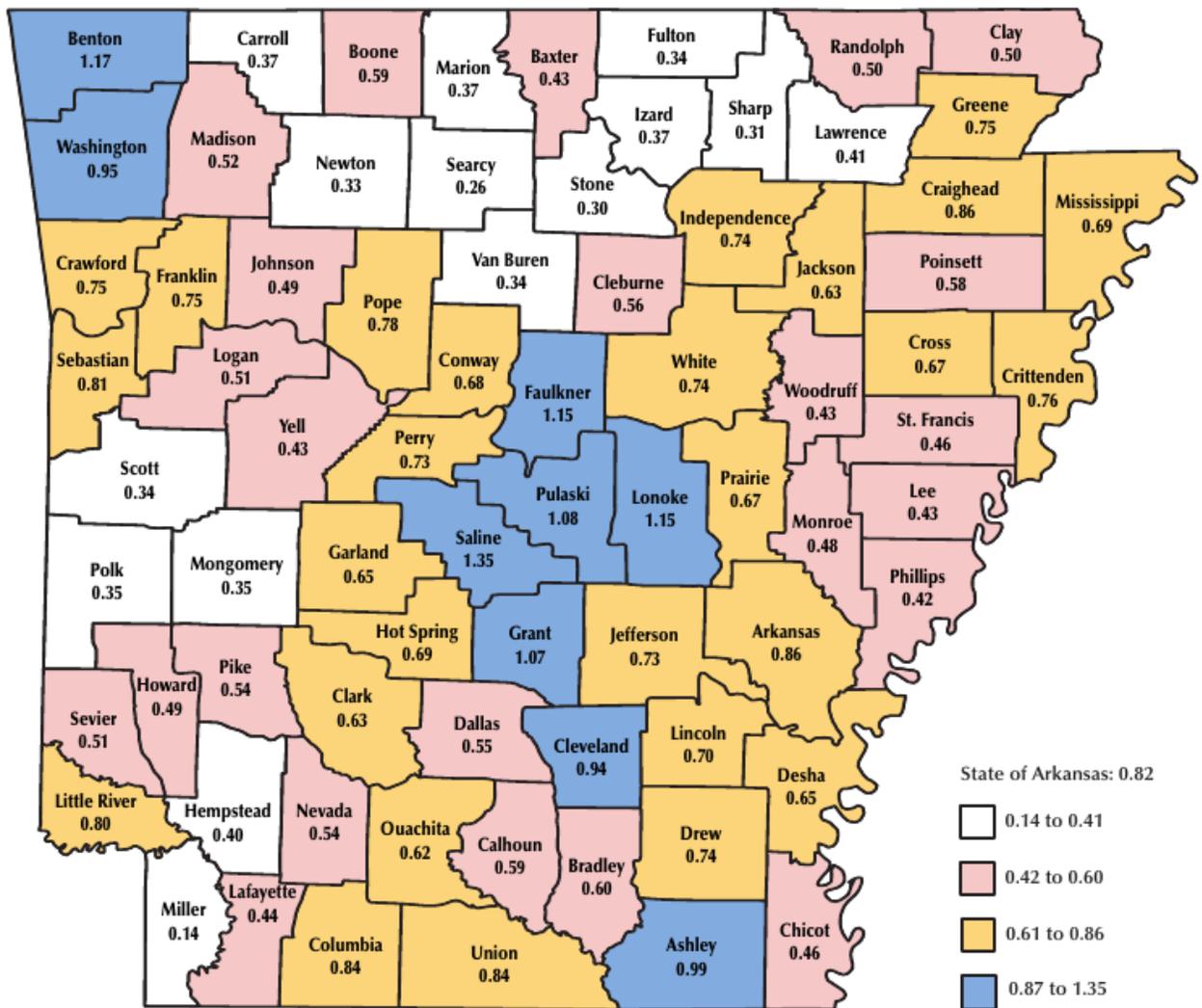


Figura 3.1: Proporção dos 25% dos domicílios que pagam mais impostos em relação aos 25% dos domicílios que pagam menos impostos. Extraído de [3].

Um outro estudo interessante foi realizado pelo economista Taisei Kaizoji [33] que usando um banco de dados de contribuintes de alta renda do Japão, investigou como são formados as chamadas ruas e bairros residências de alta classe. Ele examinou as flutuações no rendimento pessoal de cerca de 80 mil contribuintes de alta renda, por dois anos consecutivos, e foi encontrado que a distribuição cumulativa complementar (Probabilidade de sobrevivência) do número de grande rendimentos e o rendimento total dessas pessoas para cada uma das cidades foram bem descritas por uma distribuição lei de potência com um expoente próximo

de 2, e que a variação relativa dos rendimentos totais dos grandes assalariados que vivem numa cidade foi positivamente correlacionado com o número deles vivendo na cidade. Os resultados empíricos do estudo mostraram que os grandes ganhadores de renda tendem a gravitar para um pequeno número de cidades e sugerem que essa concentração, de tais pessoas em um pequeno número de cidades resulta nas ruas e bairros residências de alta classe.

3.1 Modelo Heterogêneo e Adaptativo com Aspectos Espaciais

Inspirados nos aspectos discutidos na seção anterior e nos modelos de muitos agentes introduzidos no capítulo 2 desenvolvemos nesta seção uma generalização do modelo heterogêneo e adaptativo [22]. De modo a investigar o papel da estrutura espacial levamos em conta interações locais. O modelo consiste de um autômato celular bidimensional [40, 41] com condição de contorno periódica implementado numa rede quadrada de tamanho linear L de modo a simular o processo espacial da distribuição de renda. A dinâmica se dá portanto num sistema fechado composto por L^2 sítios (agentes) $i = 1, 2, \dots, L^2$ e recurso total M , caracterizados por uma quantidade de recursos m_i , por uma taxa de gasto ω_i e por uma mobilidade μ_i podendo ser descrita pelos seguintes passos:

- Passo 1

Na condição inicial associamos a cada agente uma quantidade de recursos fixa ($m_i = 1, \forall i$) e uma taxa de gasto ω_i , uniformemente distribuída no intervalo ($0 < \omega_i < 1$).

- Passo 2

Assim como discutido na seção 2.3, uma fração q do total dos agente é positivamente correlacionada (Tipo1), enquanto que uma fração $1 - q$ é negativamente correlacionada (Tipo2).

- Passo 3

Ainda na condição inicial associamos a cada agente um parâmetro chamado mobilidade

($0 \leq \mu_i \leq 1$), que pode ser compreendido como a capacidade do agente de modificar sua taxa de gasto como resposta às mudanças externas. A uma fração p do total de agentes associamos mobilidade nula $\mu_j = 0$ ($j = 1 \dots L_p$), onde $L_p = pL^2$. E determinamos a distância média \bar{D} entre esses pontos como indicado na figura 3.2. Em torno dos pontos de mobilidade nula a mobilidade μ_i cresce gaussianamente, segundo a expressão,

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{L_p} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{D_{ij}}{a}\right)^2}, \quad (3.1)$$

onde D_{ij} corresponde a distância entre o sítio i e o j -ésimo sítio de mobilidade nula e a é o raio típico da região de mobilidade mínima (ver figura 3.2b).

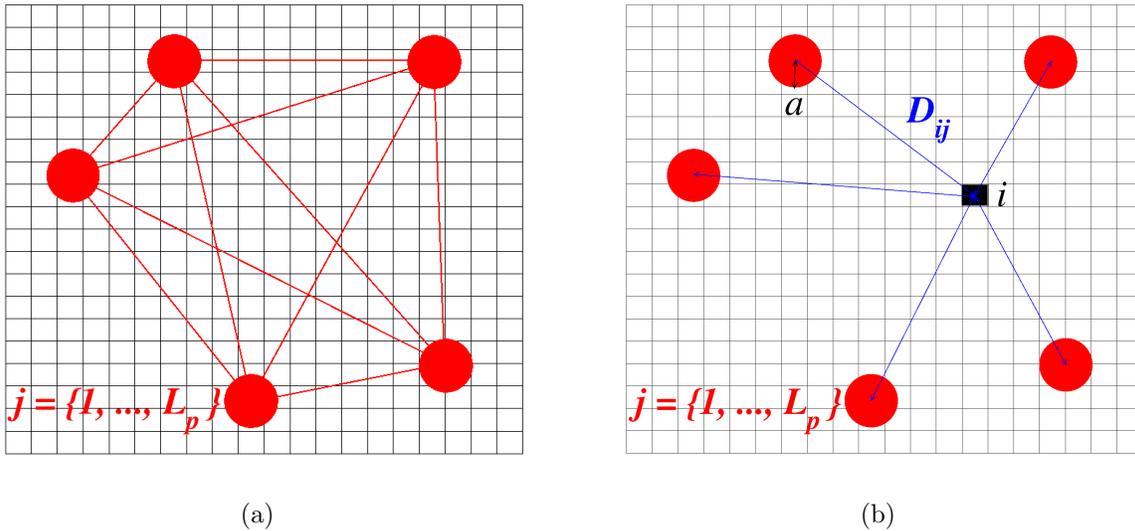


Figura 3.2: A figura (a) representa um padrão típico com cinco sítios de mobilidade nula $L_p = 5$, e a figura (b) apresenta esquematicamente as distâncias de um sítio i às regiões com baixa mobilidade.

- Passo 4

Em seguida a mobilidade é normalizada segundo a equação:

$$\mu_i = 1 - \frac{\mu_i - \mu_{MIN}}{\mu_{MAX} - \mu_{MIN}}, \quad (3.2)$$

onde μ_{MIN} e μ_{MAX} são o mínimo e máximo valor de mobilidade do sistema.

- Passo 5

A dinâmica começa quando um agente i escolhido aleatoriamente transfere uma fração ω_i do seu recurso para um dos seus oito vizinhos mais próximos (vizinhança de Mo-

ore), escolhido aleatoriamente, e recebendo simultaneamente uma quantidade $\omega_j m_j$. A quantidade final de recursos após uma interação obedece a seguinte regra:

$$\begin{cases} \Delta m_{ij} = \omega_i(t)m_i - \omega_j(t)m_j \\ m_i(t+1) = m_i(t) - \Delta m_{ij} \\ m_j(t+1) = m_j(t) + \Delta m_{ij} \end{cases} \quad (3.3)$$

Podemos entender Δm_{ij} como o fluxo efetivo de recursos em cada transação. A vizinhança do agente i é mostra esquematicamente na figura 3.3.

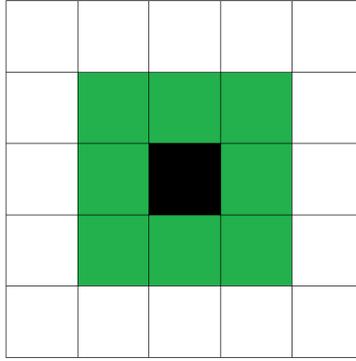


Figura 3.3: Sítio arbitrário e seus oito vizinhos mais próximos, também conhecida como vizinhança de Moore.

O processo é repetido L^2 vezes ao final do qual é contabilizado um passo de Monte Carlo. Como a taxa de gasto é modificada ao longo da dinâmica, foram introduzidos alguns parâmetros globais que possam caracterizar o sistema, que são a taxa de gasto média $\langle \omega \rangle$

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^{L^2} \omega_i \quad (3.4)$$

E o coeficiente de Gini, que é calculado operacionalmente [15] como:

$$G = \frac{1}{2L^4} \sum_{i \neq j}^{L^2} |m_i - m_j| \quad (3.5)$$

De modo a caracterizar a distribuição espacial de renda no estado estacionário, bem como sua dispersão, definimos a renda média normalizada $\langle m_{nor}(r) \rangle$ dos sítios localizados a uma distância r do sítio com máxima renda m_{max} ,

$$\langle m_{nor}(r) \rangle = \frac{1}{8R} \sum_{i=1}^{8R} \frac{m_i(r)}{m_{max}}, \quad (3.6)$$

e sua dispersão calculada da seguinte forma:

$$\Delta m_{nor}(r) = \sqrt{\langle m_{nor}^2(r) \rangle - \langle m_{nor}(r) \rangle^2}. \quad (3.7)$$

A taxa de gasto média normalizada $\langle \omega_{nor}(r) \rangle$ e sua dispersão $\Delta m_{nor}(r)$ são calculadas de forma análoga, como mostra as expressões a seguir:

$$\langle \omega_{nor}(r) \rangle = \frac{1}{8R} \sum_{i=1}^{8R} \frac{\omega_i(r)}{\omega_{max}}, \quad (3.8)$$

e

$$\Delta \omega_{nor}(r) = \sqrt{\langle \omega_{nor}^2(r) \rangle - \langle \omega_{nor}(r) \rangle^2} \quad (3.9)$$

onde ω_{max} é a taxa de gasto do sítio com máxima renda. A análise espacial foi inspirada no estudo de Iglesias e Pianegonda [27] onde eles determinaram a média temporal da correlação espacial $C^2(X = |x - x_0|) = \langle w(X)^2 \rangle_x - \langle w \rangle^2$, onde x_0 é o local escolhido como origem e w é a renda, para os sítios com renda máxima e média em uma rede unidimensional com 1001 agentes e 5×10^3 passos de tempo.

As quantidades anteriormente definidas são específicas para cada configuração inicial, portanto faz-se necessário reproduzir o procedimento para K configurações distintas de modo a garantir a relevância estatística dos resultados, como é definido a seguir de acordo com as equações:

$$[\omega] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \langle \omega \rangle_i, \quad [G] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K G_i \quad (3.10)$$

$$[m_{nor}(r)] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \langle m_{nor}(r) \rangle_i, \quad [\Delta m_{nor}(r)] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \Delta m_{nor}(r)_i \quad (3.11)$$

$$[\omega_{nor}(r)] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \langle \omega_{nor}(r) \rangle_i, \quad [\Delta \omega_{nor}(r)] \equiv \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \Delta \omega_{nor}(r)_i \quad (3.12)$$

Uma vez apresentado o modelo e sua dinâmica, no capítulo seguinte serão apresentados os resultados obtidos e suas análises.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo vamos apresentar os resultados do modelo heterogêneo e adaptativo com estrutura espacial. Todas as simulações foram realizadas com 500 amostras, numa escala de tempo de 2000 passos Monte Carlo (1 passo de Monte Carlo é o tempo necessário para que todos os agentes efetuem ao menos uma transação) no qual o sistema atinge o estado estacionário, de forma que as quantidades observadas atingem um valor constante dentro da barra de erro. A rede possui tamanho linear $L = 33$, correspondendo a um total de 1089 agentes, cada qual possuindo inicialmente uma unidade arbitrária de renda e taxa de gasto $\omega \sim U(0, 1)$ e consideramos $L_p = 4$.

4.1 Caracterização Temporal

Apresentaremos inicialmente os gráficos associados aos valores médios da taxa de gasto $[\omega]$ e do coeficiente de Gini $[G]$ como função do tempo (t), expostos na figura 4.1, onde cada curva representa a média amostral. O código de cores corresponde aos valores da largura (raio) a da região de mínima mobilidade e q , a fração de agentes positivamente correlacionados.

Primeiramente examinamos o comportamento da taxa de gasto $[\omega]$ em função do tempo. Percebemos que quando $q = 0$, caso em que todos os agentes são negativamente correlacionados, a taxa de gasto cresce monotonicamente com o tempo e alcança um valor final muito próximo a 1. Para $q = 0.5$, onde temos 50% dos agentes positivamente correlaciona-

dos, existe um crescimento na taxa de gasto, contudo atingido o valor máximo acontece um decrescimento até atingirmos o estado estacionário. Quando $q = 1$, todos os agentes são correlacionados positivamente, temos um comportamento monotonicamente decrescente. Ainda é possível perceber para o primeiro caso ($q = 0$) que quanto maior o valor da largura (raio) da região de mínima mobilidade, menor o valor da taxa de gasto final. Já no segundo ($q = 0.5$) e terceiro caso ($q = 1$) quanto maior a largura maior o valor final da taxa de gasto.

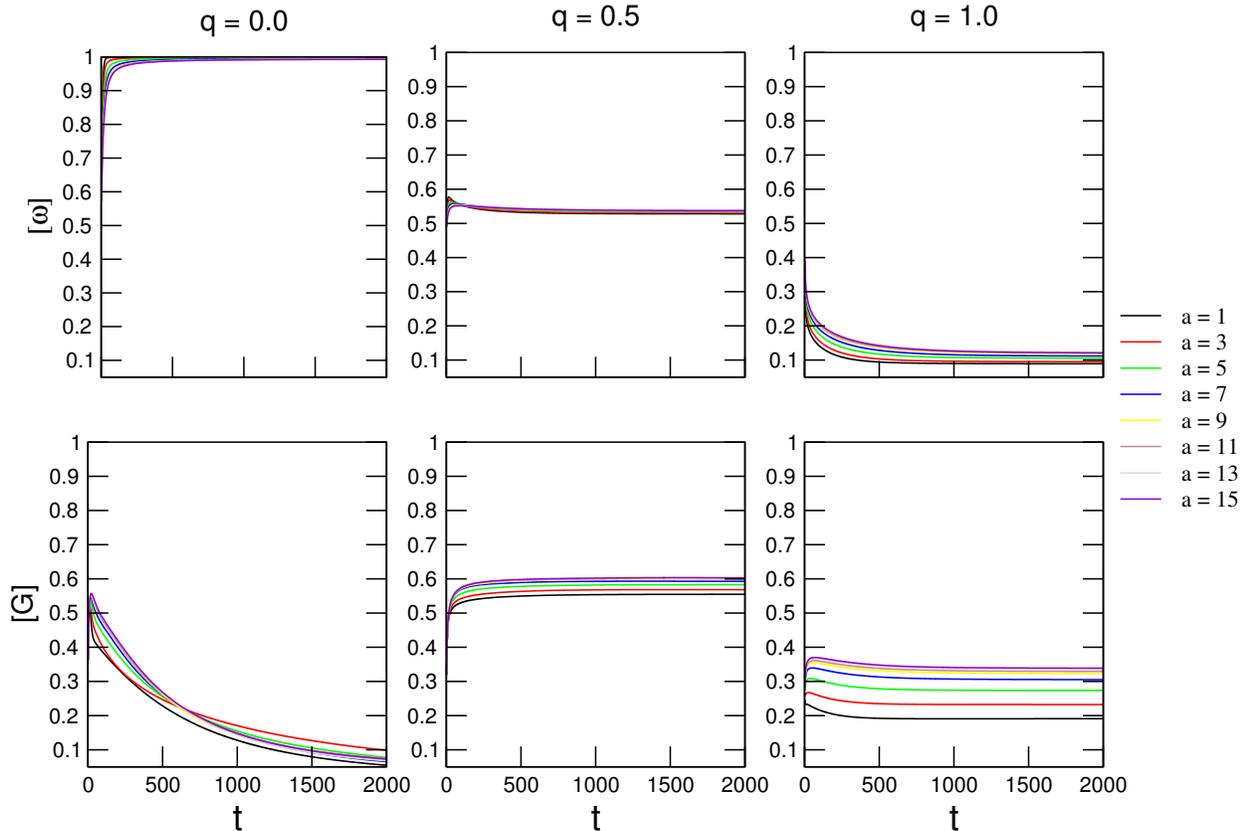


Figura 4.1: Gráficos do comportamento da taxa de gasto $[\omega]$ e índice de Gini G em função do tempo, para as frações de agentes positivamente correlacionados para os seguintes valores de $q = 0, 0.5, 1$

Observando o comportamento dos gráficos do índice de Gini $[G]$ em função do tempo, constatamos os seguintes comportamentos: Quando $q = 0$ temos um crescimento de $[G]$ até o mesmo alcançar um valor máximo e a partir desta quantidade temos um decrescimento, onde em um determinado instante ele atinge o estado estacionário. Já para o caso $q = 0.5$, ele cresce monotonicamente até alcançar o estado estacionário. Enquanto que, para $q = 1$ temos um leve crescimento do índice de Gini, seguido por um decrescimento até que este

alcançe o estado estacionário com valores dependentes de a . Notamos ainda, que para os três casos quanto maior a largura da região de mínima mobilidade maior será o valor final do índice de Gini.

Na figura 4.2 exibimos os resultados para o estado estacionário do índice de Gini como função da taxa de gasto, num espaço de parâmetros $([\omega], [G])$ onde cada curva está associada a um valor da largura e os pontos de cada curva correspondem a uma fração q , que está compreendida no intervalo $0 \leq q \leq 1$ em passos $dq = 0.05$. Percebemos que em nosso modelo, a dinâmica do sistema produz comportamentos limitantes para $0.09 \leq G \leq 0.67$ e $0.09 \leq \omega \leq 1.0$. Quando $q = 0.25$ e $a = 15$, temos o máximo valor para o índice de Gini, ou seja, $[G_{max}] = 0.67 \pm 0.04$ e a taxa de gasto é igual a 0.71 ± 0.01 .

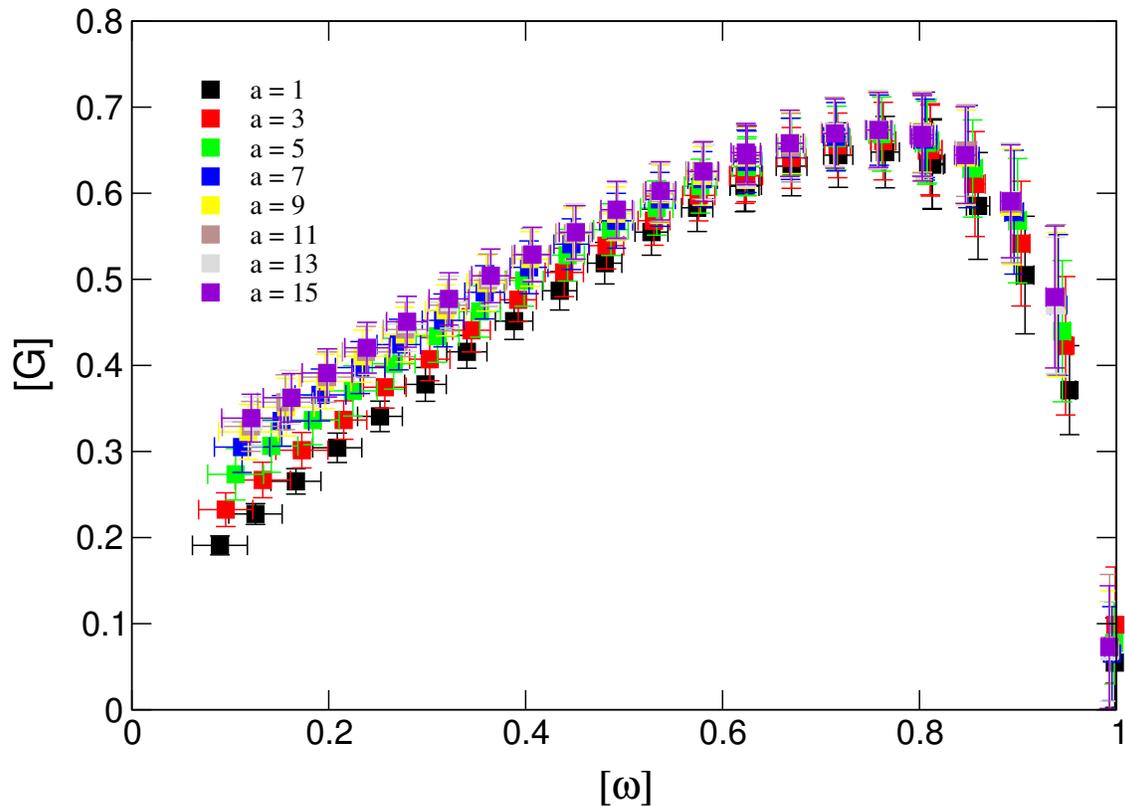


Figura 4.2: Gráfico do comportamento do índice de Gini $[G]$ em função da taxa de gasto $[\omega]$.

Na figura 4.3 confrontamos as características do gráfico 4.2 com dados reais para as médias do coeficiente de Gini e da taxa de gasto de 132 países, no período de 1990 à 2009 (círculos pretos) segundo o Banco Mundial [19, 20]. A particularidade deste resultado, é que apenas 17 dos 132 pontos extraídos do banco de dados encontram-se fora da região delimitada pelas

curvas do modelo correspondendo a aproximadamente 87% de delimitação.

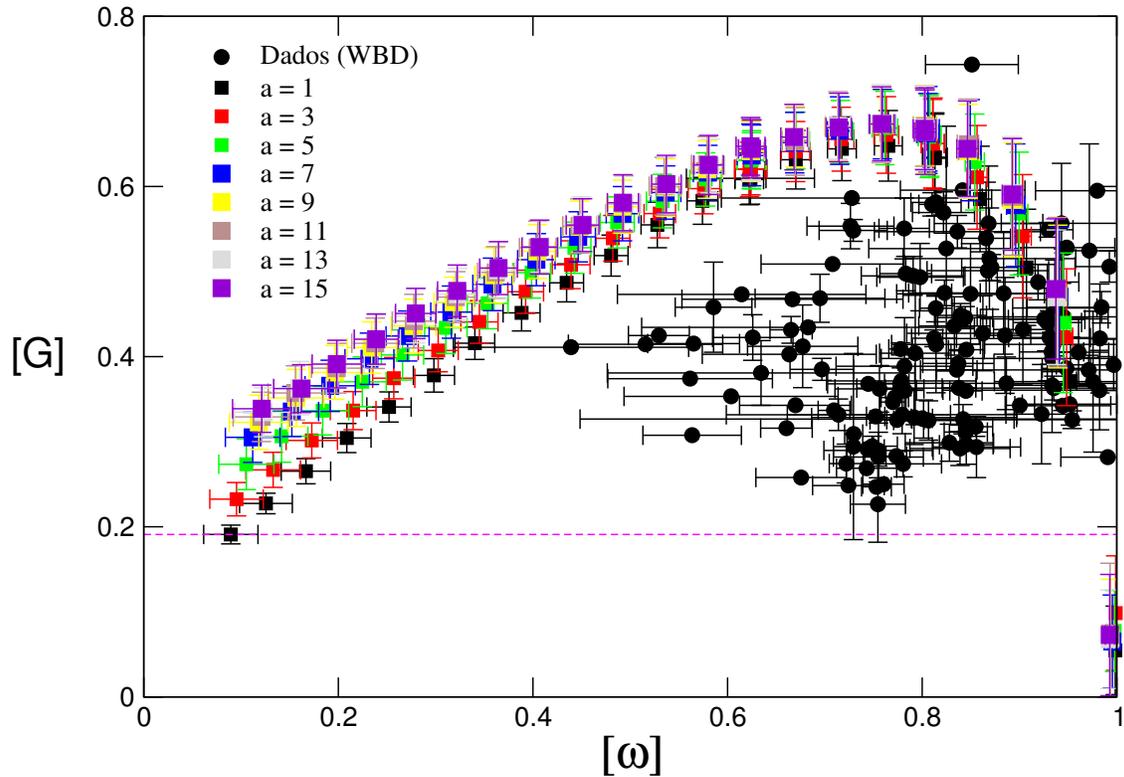


Figura 4.3: Gráfico comportamento do índice de Gini $[G]$ em função da taxa de gasto $[\omega]$, em comparação com as médias para o coeficiente de Gini e taxa de gasto dos 132 países, no período de 1990 à 2009 (círculos pretos).

4.2 Caracterização Espacial

Uma vez apresentados os comportamentos das grandezas que caracterizam globalmente o sistema no estado estacionário, como função dos parâmetros do modelo apresentamos agora os padrões espaciais associados a mobilidade, taxa de gasto e renda. A seguir, exibiremos os padrões formados para uma amostra típica, no tempo $t = 2000$ para os valores de q , contidos no intervalo $0,25 \leq q \leq 0,75$ em passos $dq = 0,25$, e larguras a compreendidas no intervalo $1 \leq a \leq 15$ em passos $da = 3$.

Primeiramente exibimos na figura 4.4 os padrões formados pela mobilidade. Nesta figura é possível visualizar as regiões de mínima mobilidade, onde os agentes que se encontram dentro desta região tem uma pequena probabilidade de alterar sua taxa de gasto ao longo

da dinâmica. Com o aumento do parâmetro a , é possível perceber o aumento das regiões com sua conseqüente sobreposição.

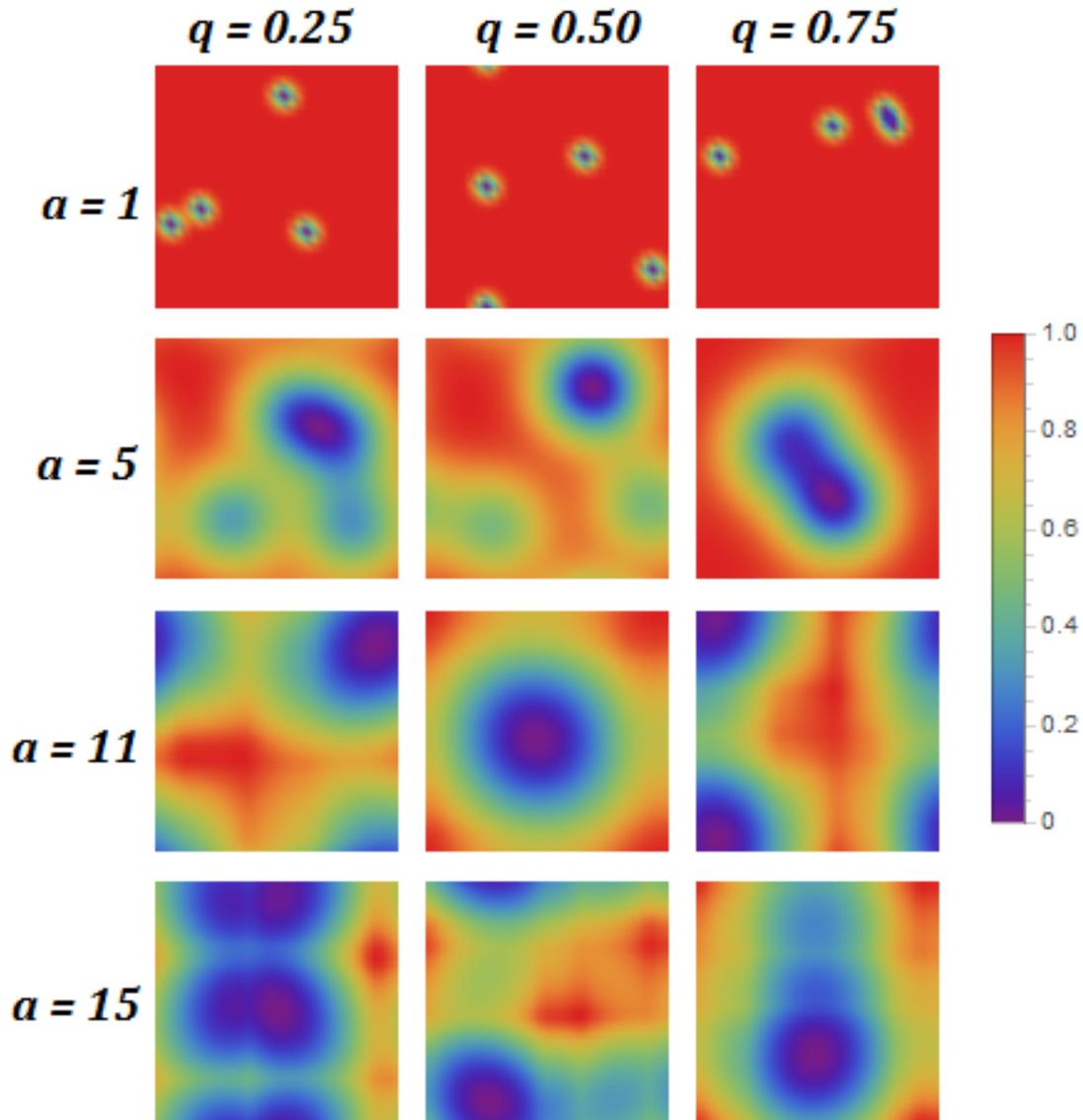


Figura 4.4: Padrões da mobilidade para distintos valores q e a .

Os valores da mobilidade associados a cada sítio constituem um parâmetro constante ao longo de toda dinâmica, e eles definem os mecanismos de adaptação da taxa de gasto. De modo a apreciar a relação entre estes parâmetros apresentamos na figura 4.5 os padrões da taxa de gasto (ω) nos quais notamos que nas regiões de mínima mobilidade existe uma heterogeneidade na distribuição da taxa de gasto, enquanto que as regiões de mobilidade

máxima e intermediária exibem taxas de gasto mais homogêneas, como por exemplo, no caso em que $a = 15$ e $q = 0.75$.

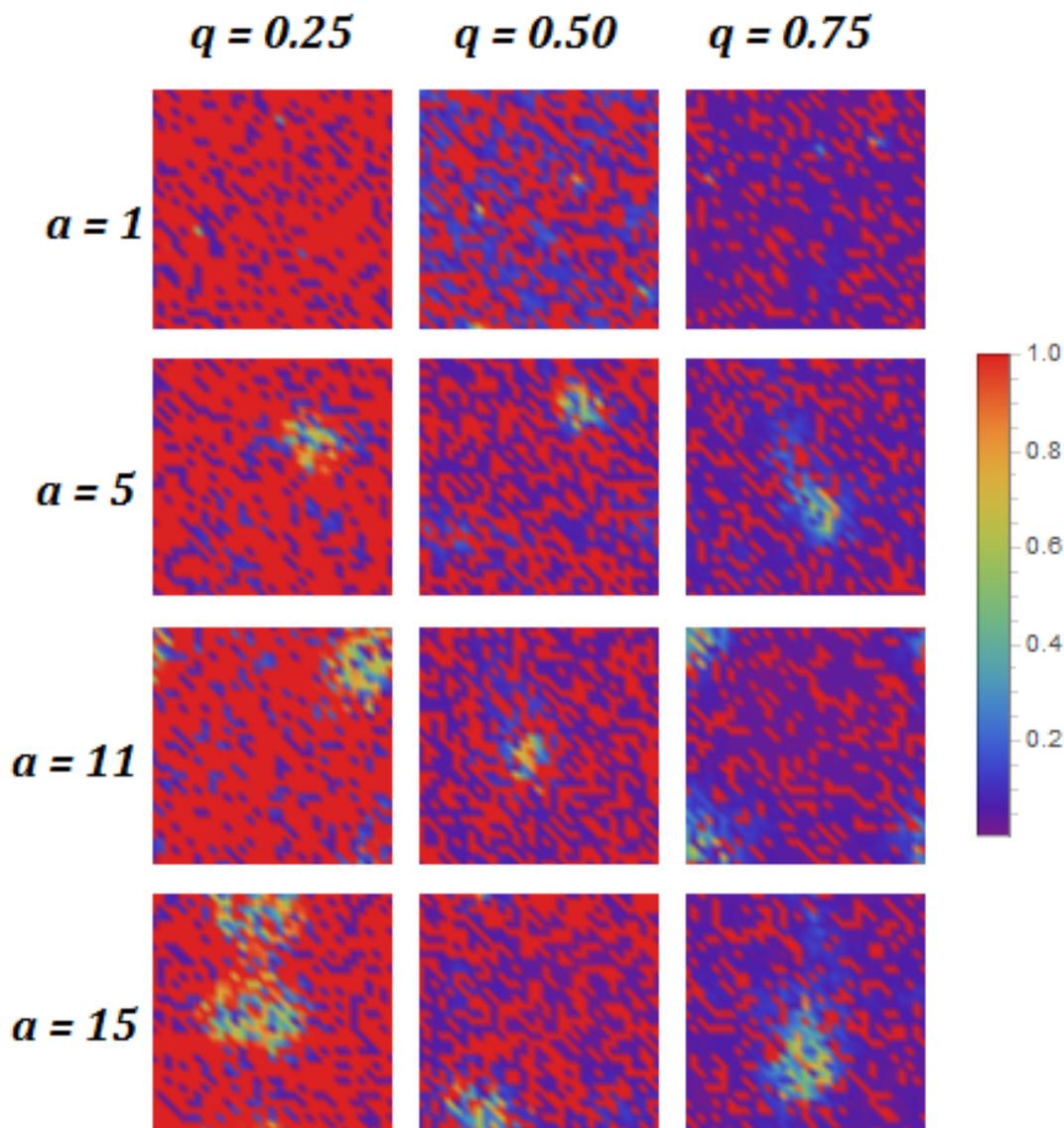


Figura 4.5: Padrões da taxa de gasto para distintos valores de q e a .

Assim como nos modelos apresentados anteriormente no capítulo 2, os maiores valores de taxa de gasto estão associados aos menores valores de renda. Na figura 4.6 exibimos os padrões formados pela renda, e percebemos que nas regiões de mínima mobilidade encontram-se os agentes que possuem maiores rendimentos. Isto ocorre, por que, no início da dinâmica alguns dos agentes que estão dentro destas regiões possuem baixas taxas de gasto. Neste

caso existe algumas exceções, pois como a região de mínima mobilidade é heterogênea podem existir alguns agentes com altas taxas de gasto e, ao final da dinâmica estes agentes podem possuir baixas rendas.

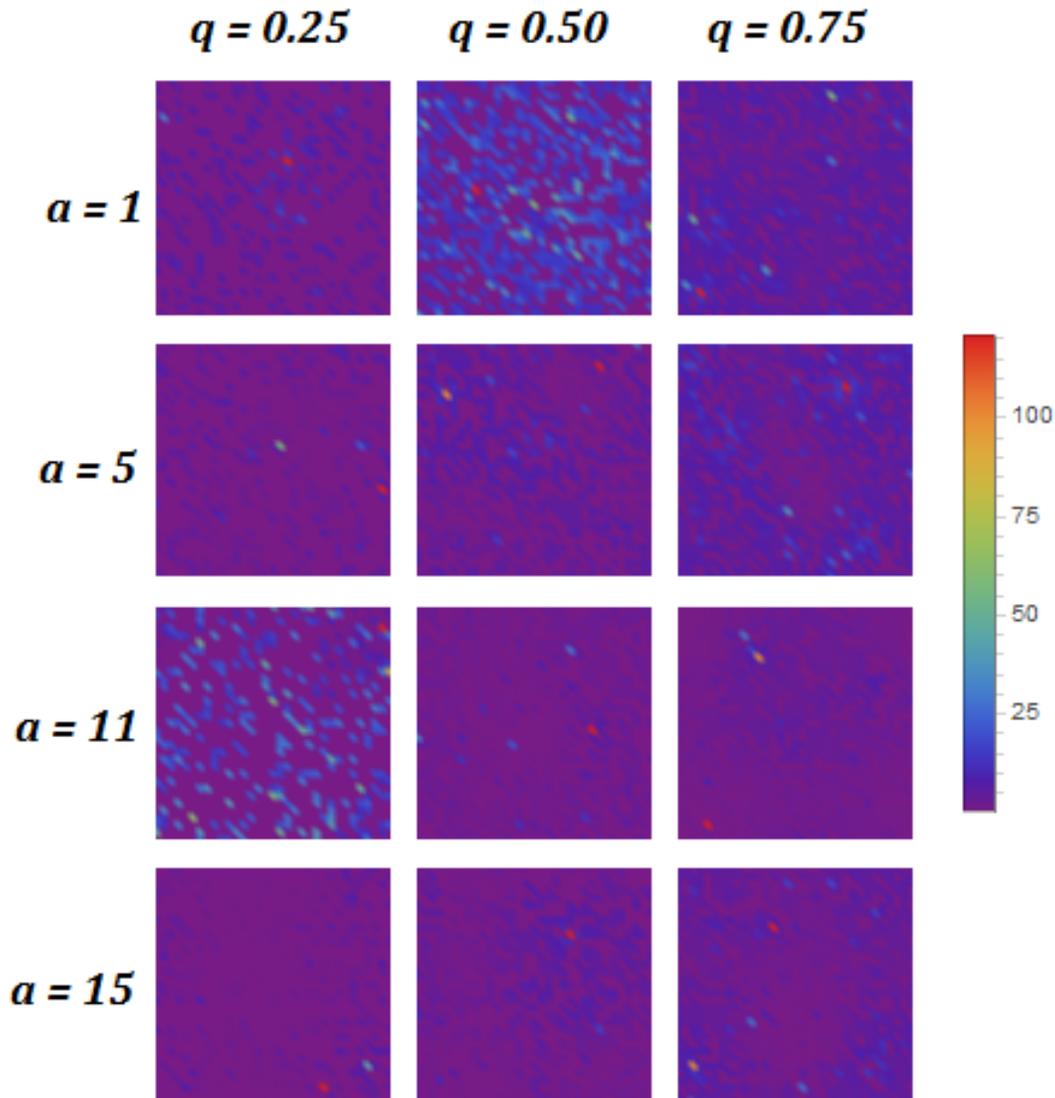
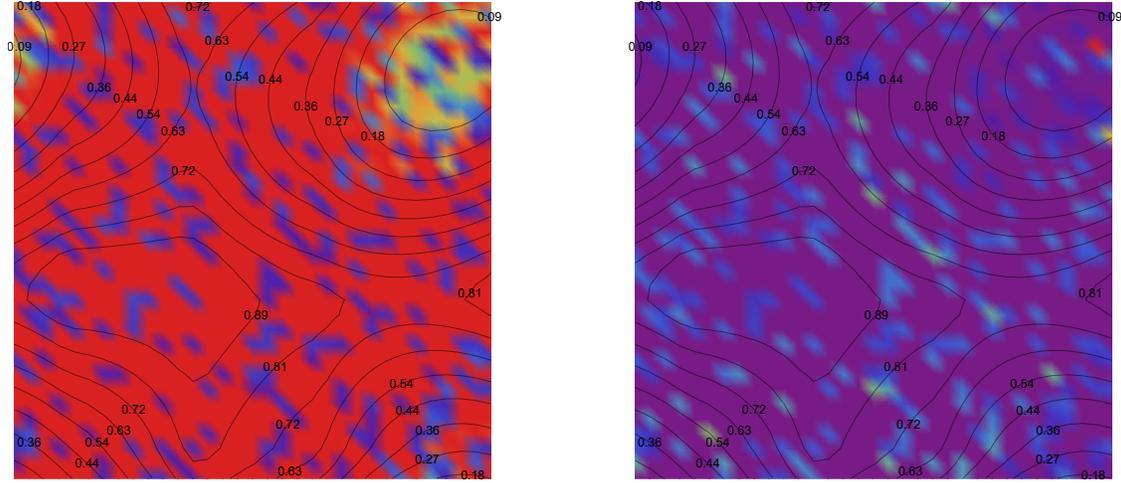


Figura 4.6: Padrões da renda para distintos valores de q e a .

De modo sintetizar os resultados discutidos anteriormente, apresentamos na figura 4.7 os padrões formados pela taxa de gasto e renda para os parâmetros $q = 0.25$ e $a = 11$, ambos com as curvas de nível associados a mobilidade. Nesta figura é possível visualizar o crescimento dos valores da mobilidade, e como consequência o aumento da taxa de gasto em torno dos pontos de mínima mobilidade. As curvas de nível apontam para um crescimento

aparentemente circular da renda em torno destes mesmos pontos.



(a) Padrão da taxa de gasto com curvas de mobilidade. (b) Padrão da renda com curvas de mobilidade.

Figura 4.7: Padrões da taxa de gasto e renda para $q = 0.25$ e $a = 11$, com as curvas de nível da mobilidade e mesmo código de cores utilizados nas figuras 4.5 e 4.6.

Embora a desigualdade de renda seja usualmente medida pelo índice de Gini, alguns estudos indicam que a relação entre a desigualdade e outros fatores, como o crescimento econômico no nível estadual é diferente daquela de nível urbano (condados e cidades) [30]. Por este motivo o índice de Gini não seria adequado para medir a desigualdade a nível urbano [27]. Nos últimos anos foram propostas algumas medidas alternativas para quantificar a distribuição espacial da renda, como por exemplo, as propostas introduzidas por John P. Shelnett e Vincent W. Yao [3], e S. Pianegonda e J. R. Iglesias [27] citados no capítulo 3.

O modelo [27] consiste em uma estrutura unidimensional com N sítios e condição de contorno periódica, onde cada sítio representa um agente econômico (indivíduos, indústrias ou país). A cada agente é atribuído um parâmetro de riqueza que representa seu bem-estar, como o RNB (Receita Nacional Bruta) para os países, ou salário para os indivíduos. Na configuração inicial este parâmetro corresponde a um número entre 0 e 1 distribuído aleatoriamente entre os agentes. Para quantificar a desigualdade da distribuição espacial de renda foi determinada a média temporal da correlação espacial $C^2(X = |x - x_0|) = \langle w(X)^2 \rangle_x - \langle w \rangle^2$, onde x_0 é o local escolhido como origem e w é a renda, para os sítios com renda máxima e média em uma rede unidimensional com 1001 agentes e 5×10^3 passos de tempo.

Inspirados no trabalho S. Pianegonda e J. R. Iglesias desenvolvemos um método para caracterizar a distribuição espacial de renda no estado estacionário e sua dispersão, como descrito no capítulo 3 seção 3.1. Foi definida a renda média normalizada ($\langle m_{nor}(r) \rangle$) dos agentes localizados a uma distância r do agente com maior renda (m_{max}). Do ponto de vista físico esta quantidade possui características semelhantes aquelas associadas a função de distribuição radial $g(r)$, definida no contexto da caracterização estrutural de sólidos e líquidos como uma medida da correlação entre partículas [42, 43].

Analisando a figura 4.8 que exhibe os gráficos do comportamento da renda média normalizada como função de r , onde em cada gráfico é fixado uma fração q , que está compreendido no intervalo $0.0 \leq q \leq 1.0$ em passos $dq = 0.2$, notamos que $\langle m_{nor}(r) \rangle$ diminui com a distância radial do agente de máxima renda até atingir um valor constante, e quanto maior a largura da região de mínima mobilidade, menor o valor da renda média. Percebemos ainda, que os maiores valores da $\langle m_{nor}(r) \rangle$ ocorrem nos casos em que $q = 0$ e $q = 1$. Este resultado corrobora a análise apresentada para o comportamento do índice de Gini como função da taxa de gasto contido no gráfico 4.2, que apresenta os menores valores nesses extremos.

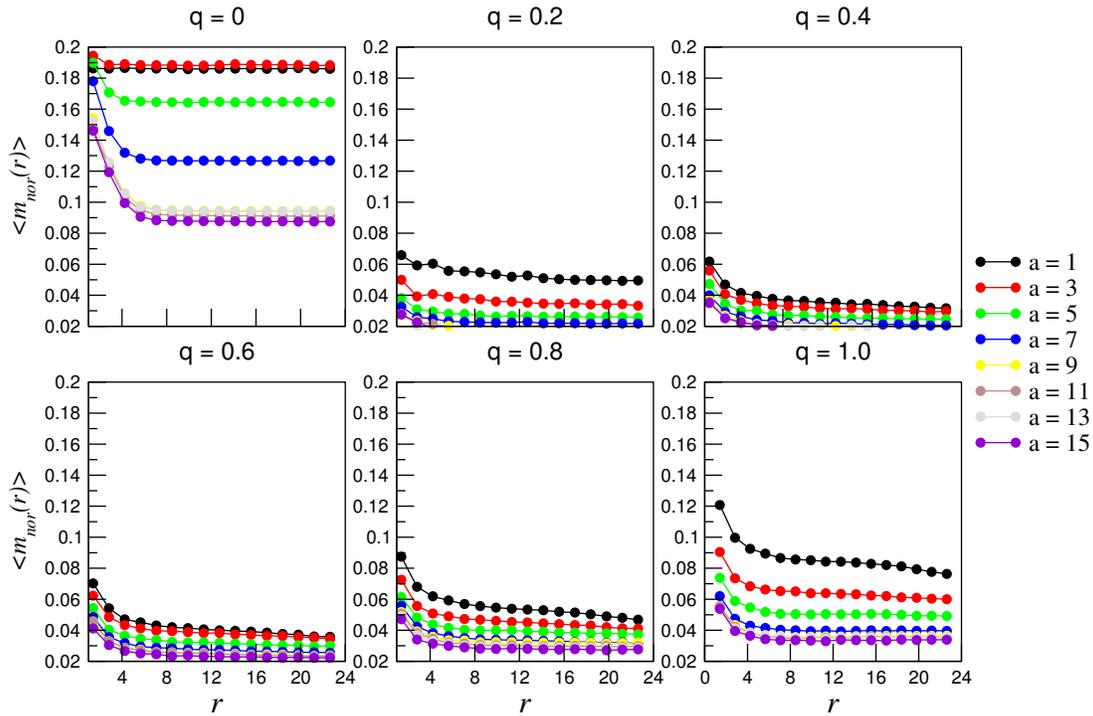


Figura 4.8: Gráficos da renda média normalizada dos agentes localizados a uma distância r do agente com máxima renda.

A figura 4.9 apresenta os gráficos da dispersão da renda média normalizada ($\langle \Delta m_{nor}(r) \rangle$) como função de r . Notamos um decrescimento da dispersão com a distância radial. As flutuações medem a heterogeneidade da renda da vizinhança, ou seja, o quanto a renda é diversificada em uma determinada distância r do agente de maior renda. Como temos uma diminuição na dispersão à medida que nos afastamos do agente de maior rendimento, isto indica que as rendas diminuem com r e, ao mesmo tempo, os valores da renda são muito próximos entre os agentes que possuem a mesma distância radial indicando uma homogeneidade, é possível perceber que exceto para o caso $q = 0$ o comportamento da dispersão é decrescente com a largura da região de mínima mobilidade. Este aspecto está de acordo com os resultados apresentados no trabalho do John P. Shelnett e Vincent W. Yao descrito no capítulo 3 figura (3.1) [3].

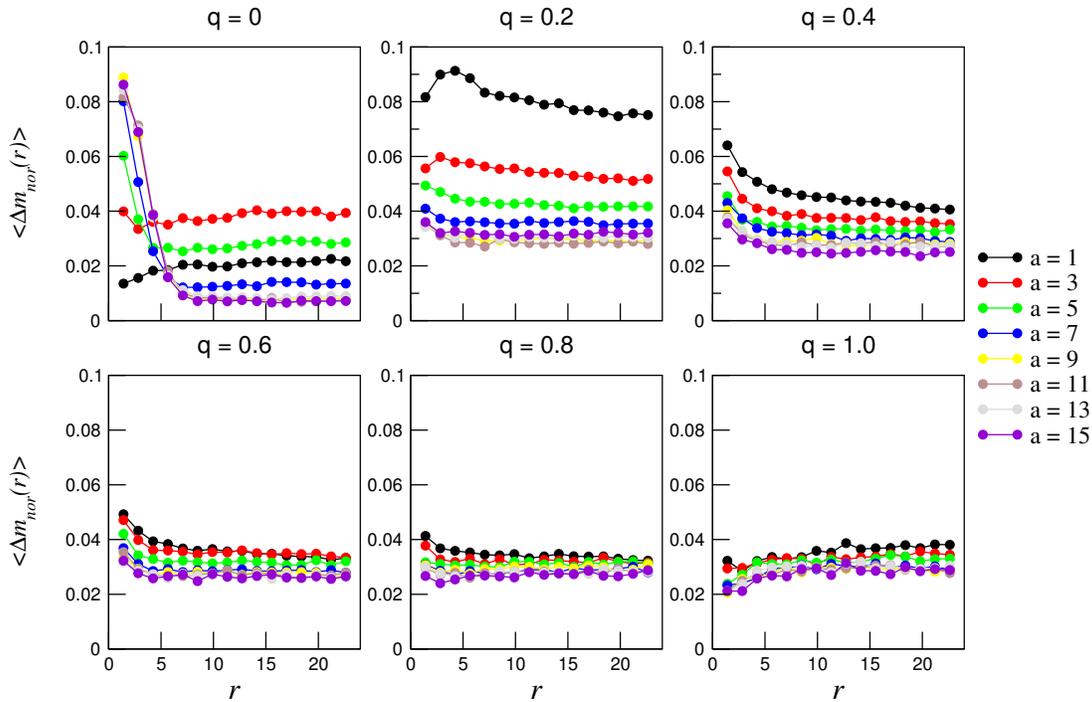


Figura 4.9: Gráficos da Dispersão da renda média normalizada dos agentes localizados a uma distância r do agente com máxima renda.

Também analisamos o comportamento da taxa de gasto média normalizada ($\langle \omega_{nor}(r) \rangle$) dos agentes localizados a uma distância r do agente com maior renda m_{max} e sua dispersão ($\langle \Delta \omega_{nor}(r) \rangle$). De acordo com a figura 4.10, para todas as frações de q existe um aumento na taxa de gasto média, e com o crescimento da região de mínima mobilidade (a) estes valores

têm uma elevação, como mostram os gráficos. Nos casos que $q = 0$ e $q = 1$ temos os menores valores do índice de Gini, reforçando o resultado apresentado no gráfico 4.2.

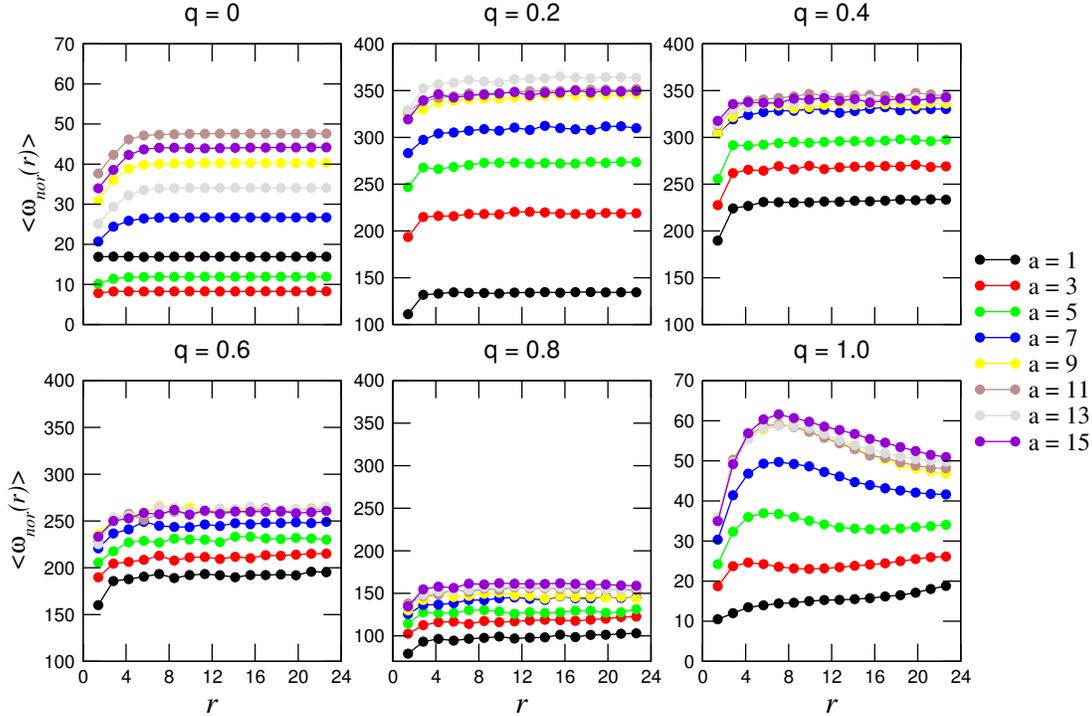


Figura 4.10: Gráficos da taxa de gasto média normalizada.

Para os gráficos da dispersão da taxa de gasto média, figura 4.11, temos um aumento de $\langle \Delta \omega_{nor}(r) \rangle$ com o crescimento de r , exeto para o caso em que $q = 0$. Assim quanto mais afastado do agente com máxima renda, maior a diversidade de taxas de gasto, isto também pode ser apreciado na figura 4.6.

É Possível perceber nos gráficos apresentados nas figuras 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11, que para um valor característico de r_c as curvas se tornam constantes, este valor está intimamente relacionado com a distância média dos sítios de mínima mobilidade \bar{D} , vistos no capítulo 2.3 (ver figura 3.2a).

A distribuição de probabilidade associada a distância l entre dois pontos, aleatoriamente sorteados em um quadrado de lado unitário é descrita pela expressão [44, 45]:

$$P(l) = \begin{cases} 2l(l^2 - 4l + \pi), & 0 \leq l \leq 1 \\ 2l \left[4\sqrt{l^2 - 1} - (l^2 + 2 - \pi) - 4 \arctan \left(\sqrt{l^2 - 1} \right) \right], & 1 \leq l \leq \sqrt{2} \end{cases} \quad (4.1)$$

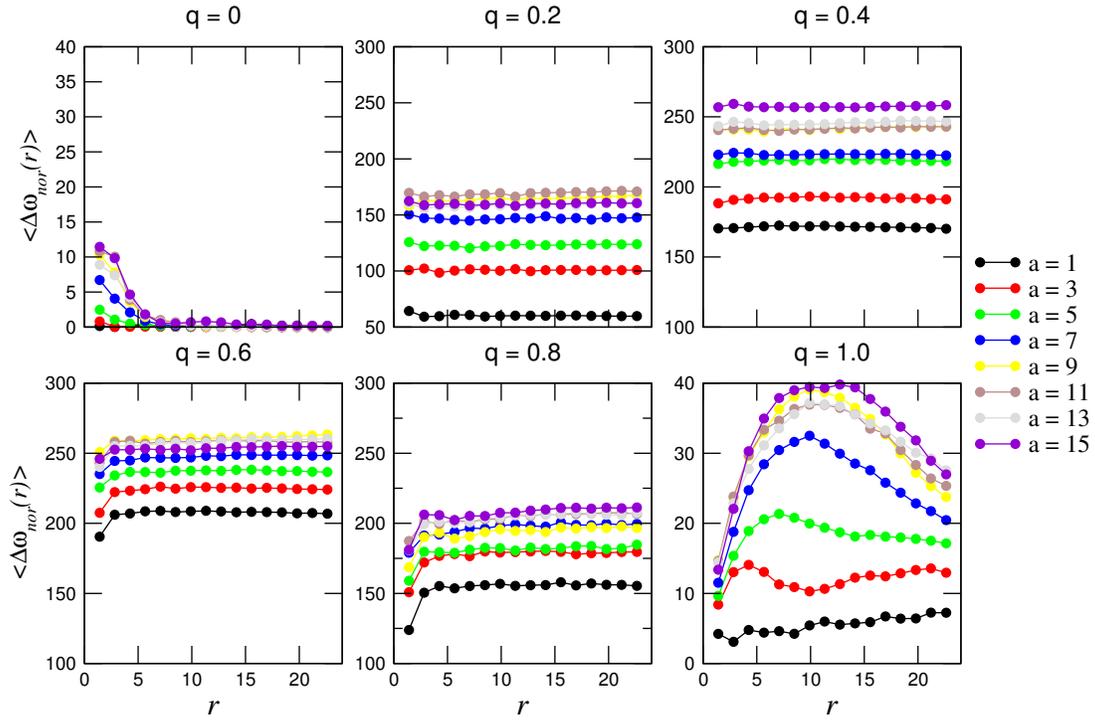


Figura 4.11: Gráficos da dispersão da taxa de gasto média normalizada.

para um quadrado de lado L , esta expressão fornece a seguinte distância média

$$\bar{D} = \frac{L}{15} \left[2 + \sqrt{2} + 5 \operatorname{arcsinh}(1) \right], \quad (4.2)$$

e em particular para o nosso modelo em que temos condições de contorno periódicas a distância média efetiva é $\bar{D}_{efe} = \frac{\bar{D}}{2} \cong 8.58$ o que é o que produz uma estimativa compatível do comportamento das quantidades discutidas anteriormente.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta dissertação propomos uma generalização do modelo Heterogêneo e Adaptativo [22] para estudar a distribuição espacial de renda. Estudamos alguns aspectos da distribuição espacial sob a ótica econômica, como por exemplo, as investigações dos fatores socioeconômicos que se correlacionam com a distribuição de renda e a quantificação da mesma. Inspirados nestes aspectos e nos modelos apresentados na literatura, desenvolvemos um modelo de autômato celular numa rede bidimensional quadrada de lado L onde a cada sítio i associamos um agente caracterizado por sua renda (m_i), taxa de gasto (ω_i) e mobilidade (μ_i).

A mobilidade está associada a probabilidade $0 \leq \mu_i \leq 1$ de que o agente modifique sua taxa de gasto, e seu valor é determinado por uma composição de gaussianas de largura a centradas em L_p pontos, distribuídos aleatoriamente na rede. A fração de agentes cuja taxa de gasto se adapta de forma positivamente correlacionada com a variação da renda é determinada pelo parâmetro q , enquanto que o restante dos agentes apresenta correlação negativa. No início da dinâmica a taxa de gasto é distribuída uniformemente no intervalo $0 \leq \omega \leq 1$, o que define a heterogeneidade do sistema.

A princípio, investigamos as influências de algumas características como a adaptabilidade, heterogeneidade e as interações locais do sistema. Para isto, variamos a fração de agentes positivamente correlacionados (q) e as larguras da região de mínima mobilidade a . Notamos que o comportamento da taxa de gasto como função do tempo, é monotonicamente crescente para $q < 0.5$ e monotonicamente decrescente para $q > 0.5$, enquanto que o índice de Gini

possui um comportamento não monotônico. Também analisamos o espaço de parâmetros $[G, \omega]$, para o estado estacionário, e verificamos que o nosso modelo produz valores limitantes para $0.09 \leq [G] \leq 0.67$ e $0.09 \leq [\omega] \leq 0.9$. Ao compararmos estes resultados com os dados extraídos do banco mundial, como exibimos na figura 4.3, percebemos que a região delimitada pelas curvas correspondem em torno de 87% de delimitação, ou seja, apenas 17 dos 132 países estão fora desta região.

Posteriormente, exibimos os padrões espaciais associados a mobilidade, taxa de gasto e renda para os valores de q , contidos no intervalo $0.25 \leq q \leq 0.75$ em passos $dq = 0.25$, e larguras a compreendidas no intervalo $1 \leq a \leq 15$ em passos $da = 3$. Nos padrões gerados percebemos que o índice de Gini aumenta com a largura a (figuras 4.5 e 4.2), e que nas regiões de mínima mobilidade existe uma heterogeneidade da taxa de gasto, de modo que nestas regiões encontra-se grande parte dos agentes com altos rendimentos.

De forma a quantificar a distribuição espacial de recursos introduzimos a renda média normalizada ($\langle m_{nor}(r) \rangle$) e a taxa de gasto média normalizada ($\langle \omega_{nor}(r) \rangle$) associadas aos agentes localizados a uma distância r do agente de maior renda. Observamos que a renda decresce em função da distância radial, enquanto que a taxa de gasto aumenta com esta distância, além disso, verificamos que a partir de uma certa distância característica r_c , da ordem da distância média entre os sítios de mínima mobilidade, ambos os parâmetros se tornam homogêneos.

Embora o modelo apresentado reproduza algumas características da distribuição espaço-temporal de renda associadas aos dados reais, é importante ressaltar que alguns aspectos ainda podem ser investigados, como por exemplo, a dependência dos parâmetros com o tamanho da rede L e o número de regiões de mínima mobilidade L_p . Ainda é possível investigar uma escala de tempo mais longa, onde a própria mobilidade, que em nosso modelo é constante durante toda dinâmica, tenha uma dependência com a renda.

Apêndice A

Anexo

Exibimos neste anexo uma tabela com o nome e os valores médios do índice de Gini \bar{G} e da taxa de gasto $\bar{\omega}$, e suas respectivas barras de erro, para cada um dos 132 utilizados nesta pesquisa. A estatística foi realizada sobre as séries temporais no período de 1990 - 2009, disponibilizadas no Banco Mundial [19, 20].

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
1	Argélia	0.60	0.11	0.35	0.00
2	Angola	0.73	0.13	0.59	0.00
3	Argentina	0.79	0.05	0.49	0.02
4	Armênia	0.98	0.16	0.36	0.05
5	Austrália	0.77	0.01	0.35	0.00
6	Áustria	0.74	0.02	0.29	0.00
7	Azerbaijão	0.73	0.02	0.29	0.11
8	Alemanha	0.77	0.01	0.28	0.00
9	África do Sul	0.81	0.01	0.58	0.01

Tabela A.1: Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
10	Belgica	0.75	0.01	0.33	0.00
11	Belize	0.84	0.06	0.60	0.00
12	Benin	0.95	0.02	0.39	0.00
13	Butão	0.67	0.11	0.47	0.00
14	Bolívia	0.87	0.06	0.56	0.07
15	Botswana	0.62	0.07	0.61	0.00
16	Brasil	0.81	0.03	0.58	0.02
17	Bulgária	0.86	0.05	0.29	0.04
18	Burkina Faso	0.94	0.04	0.46	0.06
19	Bangladesh	0.85	0.03	0.30	0.02
20	Belarus	0.76	0.04	0.28	0.03
21	Catar	0.44	0.12	0.41	0.09
22	Cingapura	0.53	0.03	0.42	0.00
23	Chade	0.93	0.18	0.40	0.00
24	Chile	0.73	0.03	0.55	0.01
25	China	0.57	0.05	0.42	0.00
26	Colombia	0.82	0.03	0.57	0.02
27	Costa Rica	0.82	0.04	0.47	0.02
28	Costa do Marfim	0.81	0.05	0.41	0.06
29	Croácia	0.84	0.05	0.29	0.02
30	Camboja	0.93	0.07	0.41	0.03
31	Camarões	0.81	0.02	0.46	0.02
32	Canadá	0.77	0.03	0.33	0.00
33	Coréia do Sul	0.66	0.03	0.32	0.00

Tabela A.2: Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
34	Dinamarca	0.75	0.02	0.25	0.00
35	El Salvador	0.99	0.04	0.51	0.02
36	Estónia	0.76	0.05	0.36	0.03
37	Etiópia	0.92	0.04	0.33	0.06
38	Eslovênia	0.75	0.03	0.29	0.01
39	Espanha	0.77	0.01	0.35	0.01
40	Estados Unidos	0.84	0.02	0.41	0.00
41	Equador	0.78	0.03	0.55	0.04
42	Egito	0.86	0.02	0.32	0.01
43	França	0.80	0.01	0.33	0.00
44	Filipinas	0.84	0.03	0.45	0.01
45	Finlândia	0.79	0.03	0.27	0.00
46	Gâmbia	0.92	0.04	0.49	0.02
47	Geórgia	0.97	0.17	0.38	0.02
48	Gana	0.93	0.03	0.41	0.02
49	Grécia	0.90	0.02	0.34	0.00
50	Guatemala	0.93	0.03	0.55	0.01
51	Guiné	0.83	0.03	0.44	0.03
52	Guiana	0.85	0.08	0.47	0.06
53	Gabão	0.52	0.08	0.41	0.00
54	Honduras	0.84	0.09	0.55	0.02
55	Hong Kong	0.68	0.17	0.43	0.00
56	Hungria	0.78	0.04	0.27	0.02
57	Holanda	0.73	0.01	0.31	0.00
58	Haiti	0.98	0.06	0.60	0.00

Tabela A.3: Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
59	Indonésia	0.70	0.03	0.39	0.01
60	Irã	0.63	0.04	0.42	0.03
61	Irlanda	0.67	0.06	0.34	0.00
62	Israel	0.84	0.04	0.39	0.00
63	Itália	0.78	0.01	0.36	0.00
64	Índia	0.74	0.04	0.37	0.00
65	Iêmen	0.89	0.13	0.37	0.03
66	Jordânia	0.99	0.06	0.39	0.03
67	Jamaica	0.86	0.08	0.43	0.04
68	Japão	0.72	0.04	0.25	0.00
69	Kazaquistão	0.71	0.12	0.33	0.02
70	Laos	0.80	0.35	0.33	0.02
71	Latónia	0.79	0.11	0.33	0.03
72	Lituânia	0.84	0.05	0.33	0.02
73	Luxemburgo	0.56	0.05	0.31	0.00
74	Macedônia	0.93	0.04	0.37	0.06
75	Madagascar	0.93	0.04	0.44	0.04
76	Malawi	0.95	0.09	0.45	0.08
77	Mongólia	0.78	0.12	0.33	0.02
78	Marrocos	0.79	0.04	0.40	0.08
79	Moçambique	0.98	0.08	0.46	0.02
80	Malásia	0.59	0.04	0.46	0.05
81	Maldivas	0.56	0.08	0.37	0.00
82	Mali	0.90	0.03	0.43	0.06
83	Mauritânia	0.98	0.16	0.42	0.06
84	México	0.78	0.03	0.50	0.02

Tabela A.4: Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
85	Moldávia	0.94	0.20	0.36	0.014
86	Namíbia	0.85	0.05	0.74	0.00
87	Nepal	0.89	0.03	0.42	0.07
88	Nova Zelândia	0.78	0.02	0.36	0.00
89	Nigéria	0.96	0.03	0.41	0.04
90	Noruega	0.68	0.05	0.26	0.00
91	Nova Guiné	0.71	0.07	0.51	0.00
92	Panamá	0.73	0.04	0.55	0.03
93	Paquistão	0.84	0.02	0.31	0.02
94	Paraguai	0.87	0.03	0.54	0.07
95	Peru	0.80	0.04	0.49	0.04
96	polônia	0.81	0.04	0.32	0.02
97	Portugal	0.84	0.02	0.38	0.09
98	Quênia	0.88	0.05	0.47	0.07
99	Quirguistão	0.98	0.10	0.37	0.08
100	Romênia	0.83	0.05	0.30	0.02
101	Rússia	0.68	0.06	0.41	0.05
102	República Dem. do Congo	0.93	0.07	0.44	0.00
103	República do Congo	0.61	0.13	0.47	0.00
104	República Eslovaca	0.75	0.03	0.23	0.04
105	República Centro - Africana	0.97	0.03	0.52	0.13
106	República Checa	0.72	0.02	0.27	0.02
107	República Dominicana	0.87	0.03	0.50	0.02
108	Reino Unido	0.85	0.02	0.36	0.00
109	Senegal	0.93	0.04	0.44	0.07
110	Sérvia	0.99	0.05	0.28	0.09
111	Serra Leoa	0.82	0.08	0.53	0.14
112	Sri Lanka	0.84	0.02	0.36	0.04

Tabela A.5: Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

N	Países	$\bar{\omega}$	$\Delta\omega$	\bar{G}	ΔG
113	Suriname	0.95	0.05	0.53	0.00
114	Suazilândia	0.94	0.06	0.57	0.07
115	Suécia	0.76	0.02	0.25	0.00
116	Suíça	0.71	0.02	0.34	0.00
117	Tajiquistão	0.95	0.19	0.33	0.01
118	Tanzânia	0.94	0.05	0.34	0.01
119	Tailândia	0.67	0.02	0.43	0.02
120	Togo	0.95	0.05	0.34	0.00
121	Trinidad e Tobago	0.66	0.09	0.40	0.00
122	Tunísia	0.78	0.01	0.41	0.01
123	Turquia	0.81	0.02	0.42	0.01
124	Turcomenistão	0.63	0.16	0.38	0.04
125	Uganda	0.93	0.04	0.42	0.03
126	Ucrânia	0.76	0.06	0.29	0.03
127	Uruguai	0.84	0.03	0.45	0.01
128	Uzbequistão	0.78	0.07	0.39	0.06
129	Venezuela	0.70	0.07	0.47	0.03
130	Vietnã	0.78	0.08	0.37	0.02
131	Zâmbia	0.87	0.09	0.52	0.06
132	Zimbábue	0.87	0.06	0.50	0.00

Tabela A.6: Valores da taxa de consumo ω e índice de Gini médios, para o período de 1990 - 2009 dados retirados do Banco Mundial.

Referências Bibliográficas

- [1] Luiz Carlos da Silva Junior. *Efeitos de heterogeneidade e adaptabilidade sobre processos de distribuição de renda*. 2013.
- [2] Marco Patriarca, Els Heinsalu, and A Chakraborty. The abcd's of statistical many-agent economy models. Technical report, 2006.
- [3] John P Shelnutt, Vincent W Yao, et al. A spatial analysis of income inequality in arkansas at the county level: evidence from tax and commuting data. *Federal Reserve Bank of St. Louis Regional economic Development*, 1(1):52–65, 2005.
- [4] Nino Boccara. *Modeling complex systems (graduate texts in contemporary physics)*. 2003.
- [5] Sunny Y Auyang. *Foundations of complex-system theories: in economics, evolutionary biology, and statistical physics*. Cambridge University Press, 1999.
- [6] HE Stanley and RN Mantegna. *An introduction to econophysics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [7] Arnab Chatterjee, Sudhakar Yarlagadda, and Bikas K Chakrabarti. *Econophysics of wealth distributions: Econophysics-Kolkata I*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [8] Bikas K Chakrabarti, Anirban Chakraborti, and Arnab Chatterjee. *Econophysics and sociophysics: trends and perspectives*. John Wiley & Sons, 2007.
- [9] Victor M Yakovenko and J Barkley Rosser Jr. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Reviews of Modern Physics*, 81(4):1703, 2009.

- [10] C Schinckus. Between complexity of modelling and modelling of complexity: An essay on econophysics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(17):3654–3665, 2013.
- [11] Christopher G Langton. Studying artificial life with cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 22(1-3):120–149, 1986.
- [12] Vilfredo Pareto. *Cours d'économie politique*, volume 1. Librairie Droz, 1964.
- [13] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, Els Heinsalu, and Guido Germano. Relaxation in statistical many-agent economy models. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 57(2):219–224, 2007.
- [14] Arnab Chatterjee and Bikas K Chakrabarti. Kinetic exchange models for income and wealth distributions. *The European Physical Journal B*, 60(2):135–149, 2007.
- [15] GM Caon, S Gonçalves, and JR Iglesias. The unfair consequences of equal opportunities: Comparing exchange models of wealth distribution. *The European Physical Journal Special Topics*, 143(1):69–74, 2007.
- [16] IPEA. Instituto de Pesquisas Econômicas e Aplicadas. http://www.ipea.gov.br/desafios/index.php?option=com_content&id=2048:catid=28&Itemid=23, 2017. Accessad: 2017-01-29.
- [17] Corrado Gini. Measurement of inequality of incomes. *The Economic Journal*, 31(121):124–126, 1921.
- [18] Anand Banerjee and Victor M Yakovenko. Universal patterns of inequality. *New Journal of Physics*, 12(7):075032, 2010.
- [19] World Bank. Instituto de Pesquisas Econômicas e Aplicadas. [http://databank.worldbank.org/data/reports.aspx?source=2&series=NE.CON.TETC.ZS&country=.](http://databank.worldbank.org/data/reports.aspx?source=2&series=NE.CON.TETC.ZS&country=)
- [20] World Bank. Instituto de Pesquisas Econômicas e Aplicadas. [http://databank.worldbank.org/data/reports.aspx?source=2&series=SI.POV.GINI&country=.](http://databank.worldbank.org/data/reports.aspx?source=2&series=SI.POV.GINI&country=)

-
- [21] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Kimmo Kaski. Gibbs versus non-gibbs distributions in money dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 340(1):334–339, 2004.
- [22] LC da Silva and PH de Figueirêdo. Income distribution: An adaptive heterogeneous model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 395:275–282, 2014.
- [23] John Angle. The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth. *Social Forces*, 65(2):293–326, 1986.
- [24] Przemysław Repetowicz, Stefan Hutzler, and Peter Richmond. Dynamics of money and income distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 356(2):641–654, 2005.
- [25] Marco Patriarca, Anirban Chakraborti, and Kimmo Kaski. Statistical model with a standard γ distribution. *Physical Review E*, 70(1):016104, 2004.
- [26] Anindya S Chakrabarti. Modelling savings behavior of agents in the kinetic exchange models of market. *arXiv preprint arXiv:1006.5044*, 2010.
- [27] S Pianegonda and JR Iglesias. Inequalities of wealth distribution in a conservative economy. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 342(1):193–199, 2004.
- [28] Diego Garlaschelli and Maria I Loffredo. Effects of network topology on wealth distributions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(22):224018, 2008.
- [29] Urna Basu and PK Mohanty. Modeling wealth distribution in growing markets. *The European Physical Journal B*, 65(4):585–589, 2008.
- [30] Sukkoo Kim. Spatial inequality and economic development: Theories, facts, and policies. *Urbanization and growth*, page 133, 2009.
- [31] Sudiksha Joshi and Tesfa G Gebremedhin. A spatial analysis of poverty and income inequality in the appalachian region. *Journal of Rural and Community Development*, 7(2), 2012.

-
- [32] Mathias Moser and Matthias Schnetzer. The geography of average income and inequality. *Spacial Evidence from Austria (Wien 2015)*.
- [33] Taisei Kaizoji. Spatial distribution of large income earners: an empirical study on the formation of exclusive residential districts. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 347:575–582, 2005.
- [34] Roberto Ezcurra, Pedro Pascual, and Manuel Rapún. The spatial distribution of income inequality in the european union. *Environment and Planning A*, 39(4):869–890, 2007.
- [35] Arvil van Adams. Economic growth, spatial income inequality, and the role of education and training in china. 2009.
- [36] Eustáquio Reis. Spatial income inequality in brazil, 1872–2000. *Economia*, 15(2):119–140, 2014.
- [37] Michael F Goodchild and Donald G Janelle. *Spatially integrated social science*. Oxford University Press, 2004.
- [38] Spencer H Banzhaf and Randall P Walsh. Do people vote with their feet? an empirical test of tiebout’s mechanism. *The American Economic Review*, 98(3):843–863, 2008.
- [39] Tara Watson. Inequality and the measurement of residential segregation by income in american neighborhoods. *Review of Income and Wealth*, 55(3):820–844, 2009.
- [40] John Conway. The game of life. *Scientific American*, 223(4):4, 1970.
- [41] Stephen Wolfram et al. Cellular automata as models of complexity. *Nature*, 311(5985):419–424, 1984.
- [42] Harvey Gould, Jan Tobochnik, and Wolfgang Christian. *An introduction to computer simulation methods*, volume 1. Addison-Wesley New York, 2006.
- [43] Charles Kittel. *Introduction to solid state*. John Wiley & Sons, 1996.
- [44] Steven R Dunbar. The average distance between points in geometric figures. *The College Mathematics Journal*, 28(3):187, 1997.

-
- [45] <http://mathworld.wolfram.com/SquareLinePicking.html>. Accessad: 2017-02-22.