



Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada

Fator Fano de uma Junção Normal-Supercondutor com
Simetria Chiral

Edson Muniz Alves

Dissertação de Mestrado

Recife - PE

27 de abril de 2017

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Departamento de Física

Edson Muniz Alves

**Fator Fano de uma Junção Normal-Supercondutor com Simetria
Chiral**

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada do Departamento de Física da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física Aplicada.

Orientador: Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa

Coorientador: Dr. Ailton Fernandes de Macedo Junior

**Recife - PE
27 de abril de 2017**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Nome da Biblioteca, Recife-PE, Brasil

A474f Alves, Edson Muniz
Fator Fano de uma Junção Normal-Supercondutora com Simetria
Chiral / Edson Muniz Alves. – 2017.
106 f. : il.

Orientador: Anderson Luiz da Rocha e Barbosa.
Coorientador: Ailton Fernandes de Macedo Junior.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco,
Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, Recife, BR-PE, 2017.
Inclui referências.

1. Física mesoscópica 2. Método diagramático 3. Numero quântico
topológico I. Barbosa, Anderson Luiz da Rocha e, orient. II. Macedo Junior,
Ailton Fernandes de, coorient. III. Título

CDD 621

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA APLICADA

Edson Muniz Alves

Dissertação julgada adequada para obtenção do título de mestre em Física, defendida e aprovada por unanimidade em 2017 pela Comissão Examinadora.

Orientador:

Prof. Dr. Anderson Luiz da Rocha e Barbosa
UFRPE

Coorientador:

Prof. Dr. Ailton Fernandes de Macedo Junior
UFRPE

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Felipe Pereira
UFRN

Prof. Dr. Jonas Romero Fonseca de Lima
UFRPE

Dedico esta conquista a minha mãe
e minha esposa, bem como todos os
meus amigos e demais familiares.

Agradecimentos

“Nao se pode ensinar tudo a alguém, pode-se apenas ajudá-lo a encontrar por si mesmo”
-Galileu

Uma das partes mais difíceis desta dissertação foi tentar lembrar de todos os colaboradores, diretos e indiretos, mas farei um esforço para não cometer injustiça, primeiramente agradeço a minha mãe, Maria Lúcia, que sempre foi desde o cursinho pré-vestibular uma fonte incansável de apoio e encorajamento, tão surpreendente que em vários momentos se mostrou mais entusiasmada, empolgada e confiante do que eu. Não menos intensa, minha esposa, Janaína, uma segunda luz no fim de um tunel longo e escuro, ambas não escreveram nada nesta dissertação, porém afirmo com certeza matemática de que eu não poderia ter terminado sem o apoio delas. Ao meu irmão, Fábio, sempre por perto perguntando se estava tudo bem e a todos os outros familiares que de alguma forma torciam por mim.

Qualquer contanto, curto ou longo, com os professores da UFRPE gerou um benefício direto ligado aprendizagem, portanto agradeço a todos os professores que tive o prazer de conhecer, talvez uma das melhores aulas que já tive na vida foram as ministradas pelo professor Ailton Fernandes de Macedo, muito obrigado por isso e pela co-orientação. Indubitavelmente um professor em especial transcendeu todas as minhas expectativas, agradeço demais ao professor Anderson Luiz da Rocha, cujo comportamento técnico-amigável fez jus ao termo ORIENTADOR.

Como não poderia deixar de ser, agradeço também a todos os amigos que estavam pelo caminho, alguns desde a graduação. Obrigado Cibele, Emerson, João, Israel, Felipe, Angela, Harrison, Geimison, Carlos, Alan, Tiago, Bruno, Isaac, Henrique e Thiago (*japa*), esse cara me ajudou muito, o método engenhoso que ele desenvolveu e me ensinou, livrou-me de dezenas de horas de trabalho. Estes, juntamente com alguns amigos da minha infância que sempre tinham algum conselho importante formam o ensemble de pessoas maravilhosas que fizeram uma diferença real nesta dissertação, OBRIGADO.

Por fim, agradeço aos funcionários do DF-UFRPE, da limpeza a administração (valeu Neto!), que de certa forma ajudaram, um destaque vai para a CAPES, pois sendo bem realista, se não fosse a ajuda financeira eu provavelmente não poderia concluir esta trabalho.

Resumo

O transporte eletrônico em dispositivos mesoscópicos é tema relevante atual em física teórica e experimental. Essas nanoestruturas são construídas levando em conta duas geometrias fundamentais: o fio desordenado e a cavidade caótica, no primeiro os elétrons carregam a carga difusivamente enquanto no segundo a carga é transportada balisticamente. Uma das principais características destes sistemas se refere ao tipo de guia ideal conectado aos mesmos. A chamada junção NS é composta por um guia normal e outro guia supercondutor topológico. Os supercondutores topológicos são caracterizados pelo número quântico topológico Q , que conta o número de estados ligados protegidos nas bordas do material.

É neste contexto que este trabalho se baseia, estudamos a relação entre os observáveis do transporte como a condutância e o ruído de disparo com o parâmetro Q . O sistema considerado consiste numa cavidade caótica e as simetrias fundamentais desta configuração envolvem a simetria de sub-rede ou quiral (SLS), a simetria de reversão temporal (SRT) e a simetria de rotação de spin (SRS). O transporte eletrônico através desta interface é descrito pela reflexão de Andreev adicionando uma nova simetria ao problema, a simetria partícula-buraco (PHS). Todas estas simetrias fundamentais serão abordadas no contexto da teoria de matrizes aleatórias (TMA) com foco na obtenção do ruído de disparo.

Por fim, das diversas técnicas para obtenção de observáveis de transporte, escolhemos a chamada técnica diagramática ou método diagramático (MD), que consiste em extrair médias de funções que envolvem matrizes aleatórias sobre o chamado grupo unitário.

Palavras-chave: Física Mesoscópica, Teoria de Matrizes Aleatórias, Método Diagramático, Junção Metal Normal-Supercondutor, Número Quântico Topológico.

Abstract

Electronic transport in mesoscopic devices is a relevant current topic in theoretical and experimental physics. These nanostructures are constructed taking into account two fundamental geometries: the disordered wire and the kinetic cavity, in the first the electrons load the charge diffusively while in the second the charge is carried ballistically. One of the main characteristics of these systems refers to the type of ideal guide connected to them. The so-called NS junction is composed of a standard guide and another topological superconductor guide. The topological superconductors are characterized by the topological quantum number Q , which counts the number of bound states protected at the edges of the material.

It is in this context that this work is based, we study the relationship between the transport observables as the conductance and the shot noise with the Q parameter. The system considered consists of a kinetic cavity and the fundamental symmetries of this configuration involve the sub-symmetry or chiral symmetry (SLS), the time reversal symmetry (SRT) and the spin rotation symmetry (SRS). The electronic transport through this interface is described by Andreev's reflection adding a new symmetry to the problem, the particle-hole symmetry (PHS). All these fundamental symmetries will be approached in the context of the theory of random matrices (TMA) with focus in obtaining the shot noise.

Lastly, from the various techniques for obtaining transport observables, we have chosen the so-called diagrammatic technique or diagrammatic method (MD), which consists of extracting averages of functions involving random matrices on the so-called unit group.

Keywords: Mesoscopic Physics, Random Matrix Theory, Diagrammatic Method, Normal-Superconducting Metal Junction, Topological Quantum Number.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Física Mesoscópica	1
1.2	Sistemas Mesoscópicos Normais-Supercondutores	4
1.2.1	Supercondutores Topológicos	8
1.2.2	A Reflexão de Andreev	10
1.3	Teoria de Espalhamento	12
1.4	Teoria de Landauer-Buttiker para Metais Normais (N)	18
1.4.1	Condutância (G_N)	23
1.4.2	Flutuações Temporais da Corrente	26
1.4.3	O Ruído Térmico	28
1.4.4	O Ruído de Disparo (P_N)	29
1.5	O Fator Fano (F_N)	30
1.6	Estruturas Híbridas: junção Metal Normal-Supercondutor (NS)	34
1.6.1	Condutância (G_{NS})	41
1.6.2	Ruído de Disparo (P_{NS})	43
1.6.3	Fator Fano normal-supercondutor (F_{NS})	46
1.7	Teoria de Matrizes Aleatórias (TMA)	49
1.7.1	Os Bilhares Caóticos Quânticos	52
1.8	Nesta dissertação	54
1.8.1	Capítulo 2	54
1.8.2	Capítulo 3	55
1.8.3	Capítulo 4	55

2 Cálculos da Média da Condutância e do Ruído de Disparo em Cavidades

Cáoticas	56
2.1 Cavidades Cáoticas e a classe Wigner-Dyson	56
2.1.1 Integrando sobre o Grupo Unitário e (MD)	57
2.1.2 Integrando sobre o Grupo Unitário composto de Matrizes Simétricas .	65
2.1.3 Integrando sobre o Grupo Simplético	67
2.2 Os Observáveis do Transporte	68
2.2.1 Condutância	69
2.2.2 Ruído de Disparo	71
2.2.3 Fator Fano e o Limite semi-clássico	73
3 Cálculos da Média da Condutância e do Ruído de Disparo Normal-Supercondutor	75
3.1 Técnica Diagramática para classe Quiral	75
3.1.1 Integrando sobre o Grupo Ortogonal	76
3.1.2 Integrando sobre o Grupo Ortogonal Simplético	81
3.2 Os Observáveis do Transporte	82
3.3 A condutância normal-supercondutora com simetria de rotação de spin (G_{NS})	87
3.4 O ruído de disparo normal-supercondutor com simetria de rotação de spin (P_{NS})	91
3.5 A condutância e o ruído de disparo normal-supercondutor com simetria de rotação de spin quebrada	96
3.6 Fator Fano Topológico e o Limite semi-clássico	96
4 Conclusões	98
Referências Bibliográficas	100

Capítulo 1

Introdução

“Na vida, não existe nada a temer, mas a entender”

-Marie Curie

1.1 Física Mesoscópica

Foi na década de 80 que a área denominada física mesoscópica iniciou uma intensa atividade experimental. Os principais experimentos envolviam uma junção entre os materiais arseneto de gálio (*GaAs*) e arseneto de gálio alumínio (*AlGaAs*) gerando um dispositivo bidimensional com canais de condução de alta qualidade, conhecidos hoje como heteroestruturas semicondutoras. A maioria desses experimentos eram baseados numa lógica simples: a aplicação de uma diferença de potencial a terminais ligados a uma determinada amostra mesoscópica irá retirar o sistema do equilíbrio, levando-o a entrar no chamado regime de transporte [1].

Para conhecermos melhor os sistemas mesoscópicos vamos explorar os seus ingredientes primordiais. Iniciaremos por algo já bastante conhecido, a condutância G . A condutância de um condutor retangular bidimensional é diretamente proporcional a sua largura W e inversamente proporcional ao seu comprimento L , ou seja

$$G = \sigma \frac{W}{L}. \quad (1.1)$$

Onde a condutividade σ corresponde a uma propriedade do material que a amostra é feita e não depende de suas dimensões. Um questionamento importante era o seguinte: qual o limite inferior que as dimensões W ou L poderiam alcançar sem destruir o comportamento Ohmico? Por muito tempo essa pergunta ficou sem resposta, até que a partir da década de 80, graças ao avanço tecnológico, foi possível a fabricação de estruturas com dimensões da ordem do livre caminho médio do elétron, possibilitando assim a resposta para este questionamento. Condutores que tem dimensões entre o mundo macroscópico e o mundo microscópico são chamados de condutores mesoscópicos (*daí o nome física mesoscópica*), ou seja, são muito maiores que átomos mas pequenos demais para apresentarem o comportamento Ohmico classicamente conhecido. Normalmente um condutor apresenta o comportamento Ohmico quando suas dimensões forem muito maiores que as seguintes escalas [2]:

- **Comprimento de onda de Fermi** (λ_F):

Esta escala de tamanho, que varia de alguns angstroms em metais até centenas de angstroms em heteroestruturas semicondutoras [3], está relacionada a energia cinética do elétron. É conhecido o fato de que a baixas temperaturas os elétrons que carregam a corrente possuem uma energia próxima a energia de Fermi. Este é um comprimento importante no transporte mesoscópico e é dado por

$$\lambda_F = \sqrt{\frac{2\pi}{d_s}}. \quad (1.2)$$

Na qual d_s é a densidade eletrônica de equilíbrio, que descreve como os elétrons estão distribuídos na amostra.

- **Livre Caminho Médio** (L_{cm}):

Esta escala de tamanho, variando de alguns angstroms a dezenas de microns, está relacionada a distância máxima que o elétron percorre antes de mudar seu momento inicial, e é dado por [2]

$$L_{cm} = v_F \tau_m. \quad (1.3)$$

Onde $v_F = \frac{\hbar}{m} \sqrt{2\pi d_s}$ corresponde a velocidade de Fermi e τ_m é o tempo de relaxação do momento, que tipicamente é da ordem de 100 ps [2].

- **Comprimento de Localização** (ξ):

Esta escala de tamanho está relacionada a desordem. Em condutores metálicos a função de onda toma toda a amostra. No caso de isolantes, a função de onda fica localizada, decaindo exponencialmente a partir deste ponto [4].

- **Comprimento de Relaxação de Fase** (L_φ):

Esta escala de tamanho está relacionada a distância máxima que o elétron percorre antes que sua fase inicial seja destruída ou modificada e é dada, no chamado regime difusivo, por

$$L_\varphi = v_F \sqrt{\frac{\tau_m \tau_\varphi}{2}}. \quad (1.4)$$

Aparecendo o tempo de relaxação da fase, τ_φ , que relaciona o tempo máximo que o elétron percorre antes que sua fase inicial também seja destruída ou modificada [2].

As quatro escalas de comprimento acima são chamadas de comprimentos característicos, eles definem os três regimes de transporte mesoscópicos (*difusivo*, *balístico* e *localizado*) e variam fortemente com relação a fatores como: tipo de material da amostra, presença de campo magnético e variação de temperatura. Nas figuras 1.1 e 1.2 temos uma representação destes comprimentos característicos. Analisando ambas as figuras, podemos inferir que:

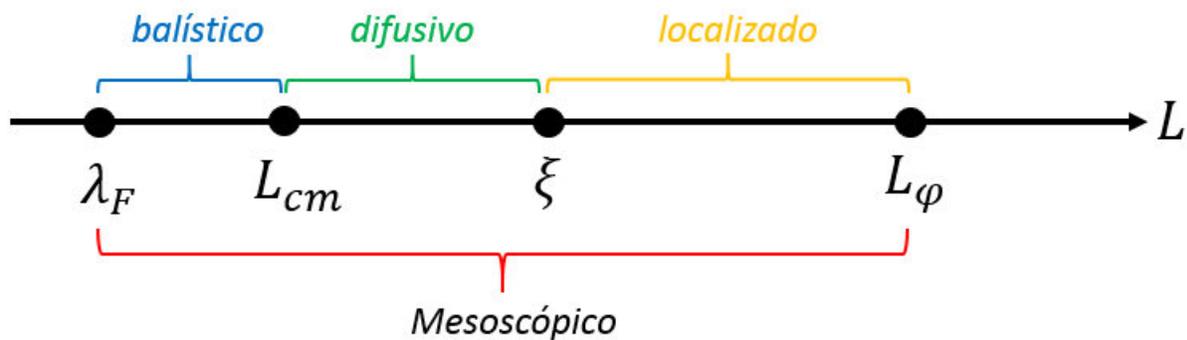


Figura 1.1: Relação entre os comprimentos característicos e os regimes de transporte.

- Quando $L < L_{cm}$, o elétron praticamente não sofre colisão ao atravessar o sistema, exemplos típicos são as cavidades caóticas, estamos no regime balístico (*ou guia de onda*);

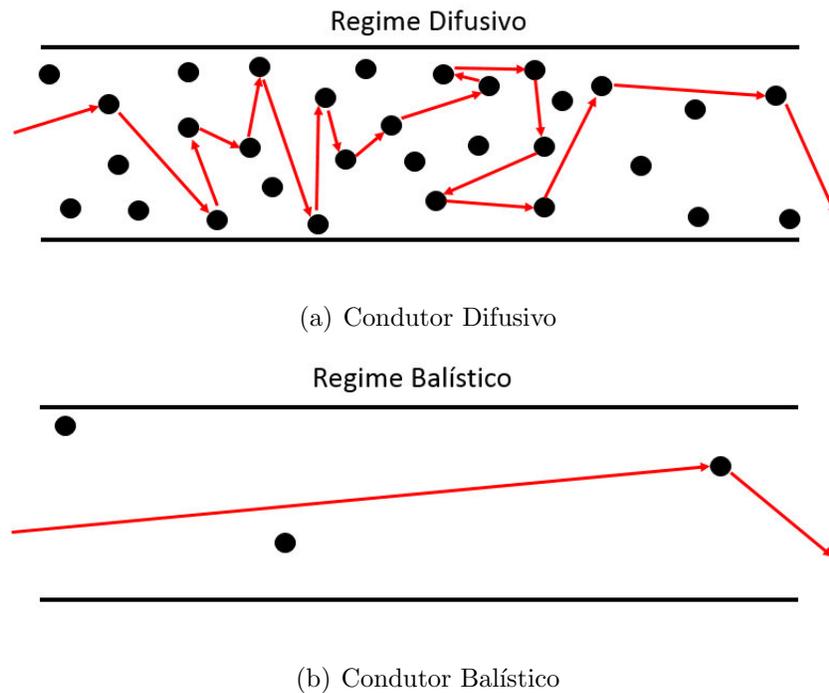


Figura 1.2: Representação simplificada de condutor balístico e um condutor difusivo

- Quando $L_{cm} < L < \xi$, estamos no regime difusivo, o elétron sofre muitas colisões elásticas e portanto não perde sua coerência, geralmente os fios quânticos desordenados são bons exemplos deste regime;
- Quando $\xi < L < L_\varphi$, as funções de onda estão localizadas e a amostra se comporta como um isolante, portanto estamos no regime localizado [4].

Os elétrons que são transportados na amostra mantêm sua coerência de fase dentro dos comprimentos característicos que acabamos de apresentar, neste trabalho vamos analisar justamente os principais observáveis do transporte sujeitos a esta coerência, como a condutância, flutuações universais, localização fraca e o ruído de disparo.

1.2 Sistemas Mesoscópicos Normais-Supercondutores

Como a seção anterior indicou, desde a década de 80 os condutores normais foram (*e continuam sendo*) exaustivamente estudados e portanto uma gigantesca quantidade de informação a seu respeito é conhecida, mas o que sabemos sobre supercondutores? A breve lista cronológica abaixo é uma tentativa de responder esta difícil pergunta [5].

- **1911** - Graças a liquefação do hélio em 1908, foi descoberto o fenômeno da supercondutividade pelo físico holandês Heike Kamerlingh Onnes, que pesquisando a resistividade elétrica do mercúrio, percebeu que este material perdia de forma abrupta a sua resistividade ao ser resfriado abaixo de $4K$ ($-269^{\circ}C$). Ele¹ denominou de “supercondutividade” esse estado de resistividade zero, veja a figura 1.3;

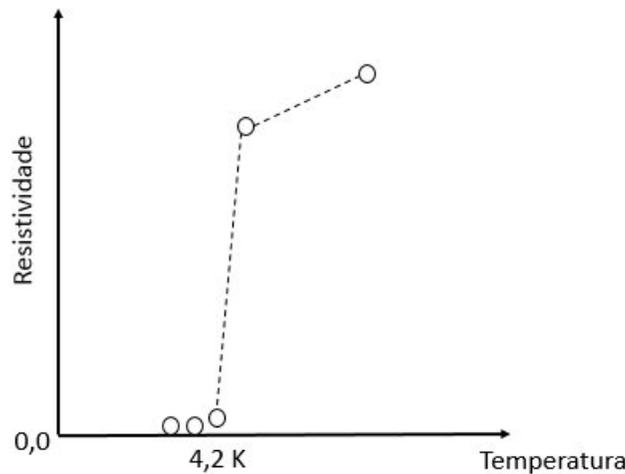


Figura 1.3: Relação entre a resistividade do mercúrio e a temperatura absoluta, figura adaptada da ref. [5].

- **1933** - Os físicos alemães W. Meissner e R. Ochenfeld descobriram o chamado “Efeito Meissner”². A supercondutividade passa então a ser encarada como um novo estado da matéria;
- **1934** - O físico inglês F. London³ formula uma teoria sobre as propriedades eletrodinâmicas dos supercondutores. O modelo proposto por ele envolve o conceito de elétrons normais e superelétrons (*como dois tipos de fluidos*). A teoria descreve o fenômeno mas não explica a ocorrência da supercondutividade;
- **1950** - Os físicos soviéticos V.L. Ginzburg e L.D. Landau desenvolvem a chamada

¹Por isso, em 1913, recebeu o Prêmio Nobel de Física

²Mostraram que o campo magnético do supercondutor além de constante, é nulo, ou seja, se um material supercondutor acima da temperatura crítica (T_c) é submetido a um campo magnético e em seguida é resfriado abaixo da T_c , ele expulsará todo o campo magnético do seu interior.

³As equações de London são condições que complementam as equações de Maxwell.

teoria fenomenológica para explicar as propriedades termodinâmicas da transição do estado normal para o supercondutor. A teoria se mostrou exata e muito poderosa, tanto que ainda hoje, a descrição de algumas propriedades dos supercondutores de alta temperatura crítica é desenvolvida a partir deste formalismo. Juntamente com a teoria de London, ambas serviram para estabelecer relações entre diferentes fenômenos. No entanto, ambas são descrições matemáticas dos efeitos observados em laboratório (*fenomenológicas*), isto é, incapazes de explicar o fenômeno como consequência das leis fundamentais da física;

- **1957** - A teoria microscópica da supercondutividade (*Teoria BCS*) é formulada por Bardeen, Cooper e Schrieffer. Ela explica a origem da supercondutividade, pelo menos os fatos observados na época, dando fundamento às teorias de London, Ginzburg e Landau⁴;
- **1962** - O físico inglês B.D. Josephson prediz, baseado na teoria BCS, que dois materiais supercondutores em contato (*uma junção*) devem apresentar propriedades particulares. Tais fenômenos, hoje conhecidos como efeito Josephson⁵ foram comprovados posteriormente em laboratório e permitiram mostrar consequências da física quântica em escala macroscópica. A partir daqui, intensificou-se a busca por materiais supercondutores dotados de alta temperatura crítica;
- **1973** - O físico norte-americano B. Matthias descobre o composto Nb_3Ge , com uma temperatura crítica de 23K ($-250^{\circ}C$);

⁴Bardeen, Cooper e Schrieffer receberam o prêmio Nobel de física em 1972, pela teoria BCS.

⁵Em 1973, ele recebeu o Prêmio Nobel de Física

- **1986** - Os físicos alemães K.A. Muller e J.G. Bednorz demonstram que o material constituído por La-Ba-Cu-O se torna supercondutor a 30K (-243°C);
- **1987** - Os físicos americanos Paul Chu e Maw-Kuen Wu descobrem o sistema composto por Y-Ba-Cu-O com temperatura crítica de 93K (-180°C);
- **1988** - Os sistemas com compostos Bi-Ca-Sr-Cu-O e Tl-Ca-Ba-Cu-O permitiram supercondutividade a 110K (-163°C) e 125K (-148°C), respectivamente;
- **1993** - Descoberta a supercondutividade num composto de Hg-Ba-Ca-Cu-O, próximo de 135K (-138°C);
- **2003** - Vitaly Ginzburg, Alexei Abrikosov e Anthony Leggett⁶ avançaram o conhecimento relacionado aos supercondutores do tipo II, veja figura 1.4;
- **2008** - O cientista de materiais japonês Hideo Hosono descobre uma família de supercondutores baseadas no ferro que atinge a fase supercondutora a uma temperatura abaixo dos 26K, e posteriormente elevando sua temperatura crítica a 55K⁷;
- **2015** - Algumas medições mostraram que compostos como o sulfureto de hidrogênio é supercondutor a aproximadamente 200K (-73°C), o que corresponde ao supercondutor com temperatura crítica mais elevada conhecido;
- **2016** - Vale citar o nobel de física deste ano, dado a David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane e J. Michael Kosterlitz pelas descobertas teóricas envolvendo as fases topológicas da matéria⁸;

⁶Os três receberam o nobel de física de 2003 por este trabalho, que também engloba a chamada superfluidez.

⁷A temperatura crítica destes supercondutores pode parecer baixa, mas a superposição deles (*e outros materiais*) gera supercondutores a altas temperaturas, jamais obtidos até então.

⁸Pois as prováveis aplicações futuras incluem o desenvolvimento de uma nova geração de dispositivos eletrônicos e supercondutores.

- **2017** - Por fim, atualmente, a busca por supercondutores a altas temperaturas críticas e aperfeiçoamento das teorias envolvidas (*e/ou criação de novas*) continua...;

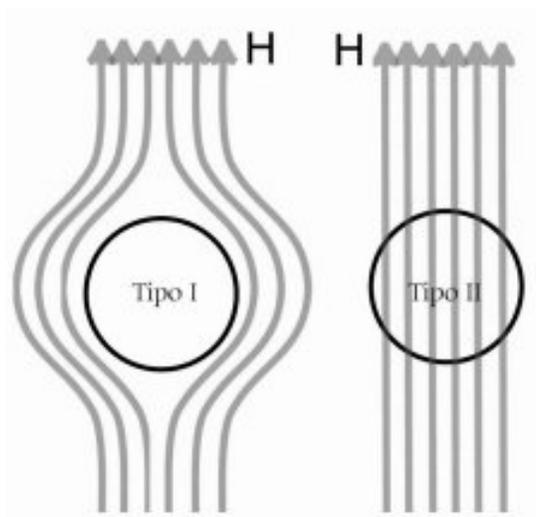


Figura 1.4: Materiais supercondutores do tipo I, macios e feitos apenas de um elemento, excluem as linhas de campo magnético. Enquanto que os do tipo II, duros e compostos de vários elementos, deixam penetrar campos magnéticos intensos, figura retirada da ref. [6].

1.2.1 Supercondutores Topológicos

Os principais resultados deste trabalho, como veremos detalhadamente no capítulo 3, foram obtidos analisando um tipo de sistema envolvendo os chamados supercondutores topológicos. Internamente, eles são condutores elétricos perfeitos, mas isolantes para transmissão térmica, nas suas bordas o contrário acontece, ou seja, suas bordas (*ou estados superficiais*) permitem transporte de calor mas não de corrente elétrica. Como é muito difícil medir a condutância térmica tanto a baixas quanto a altas temperaturas é desejável um modo seguro de medir as assinaturas elétricas destes sistemas supercondutores [7], esta é a principal motivação por trás deste tema, que é recente e vem sendo muito explorado pela física mesoscópica.

Veremos mais detalhadamente em seções específicas adiante, que na física da matéria condensada a chamada teoria de matrizes aleatórias (*TMA*) pode descrever adequadamente as propriedades universais de metais desordenados e cavidades caóticas na presença de supercondutores, essas dependentes apenas da presença ou ausência de simetrias fundamentais divididas em 10 classes, conhecida por “*tenfold way*”. Estas simetrias podem ser quebradas ou preservadas, isto levaria a distinguir se a matéria condensada com um gap de excitação

estava em determinada fase ou não. Porém, recentemente constatou-se que isso não é sempre verdade, ou seja, pode-se estar em diferentes fases sem a distinção feita pela quebra de simetria. Neste caso a distinção das fases dentro do gap de excitação é feita a partir do invariante topológico ou número quântico topológico Q [8], que pode ser um inteiro $Q \in \mathbb{Z}$ ($Q = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) ou um inteiro positivo $Q \in \mathbb{Z}_2$ ($Q = 0, 1, 2, \dots$). Nas próximas seções e no capítulo 3 veremos que o transporte e a topologia possuem uma relação íntima, ou seja, existe uma dependência entre Q e a condutância do sistema G . É neste contexto que realizamos este trabalho, pois de fato a *TMA* pode ser estendida para levar em conta as propriedades dos supercondutores e isolantes topológicos.

O sistema estudado pode ser caracterizado por um fio difusivo ou uma cavidade cáotica balística. De qualquer forma, obrigatoriamente teremos conectada ao sistema, uma junção de um condutor normal e um supercondutor topológico. Nos dois casos veremos que o processo de espalhamento envolvido é a reflexão de Andreev e as simetrias fundamentais presentes são conhecidas como simetria quiral/sub-rede/espelho, simetria de reversão temporal e simetria partícula-buraco, que serão esclarecidas oportunamente, no caso da simetria quiral, veremos também que ela pode produzir modos superficiais protegidos⁹.

A figura 1.5 mostra uma representação de um sistema normal-supercondutor como o estudado neste trabalho¹⁰. A corrente I vai fluir do metal normal, de voltagem V , para dentro do estado fundamental supercondutor dando a condutância da junção normal-supercondutora (*que será demonstrada posteriormente*). Daqui em diante, consideraremos o fio longo o suficiente para podermos negligenciar efeitos indesejáveis na transmissão entre suas pontas.

Veremos que é a simetria quiral na presença do supercondutor que vai produzir o invariante Q e tanto ele quanto a condutância do sistema, podem ser descritos pelas equações:

$$G_{NS} = \frac{e^2}{h} \text{Tr}[r_{he} r_{he}^\dagger], \quad (1.5)$$

$$Q = \text{Tr}[r_{he}]. \quad (1.6)$$

Estas, por sua vez, são determinadas pela reflexão de Andreev da matriz r_{he} na junção [10]. Vale deixar claro que no contexto da *TMA*, podemos adotar o modelo via o Hamiltoniano ou via matriz espalhamento. Neste trabalho a abordagem utilizada foi via matriz espalhamento.

⁹Conhecida também como proteção topológica, protege no sentido de sempre tentar suavizar deformações e perturbações, que podem ser geradas, por exemplo, pelas bordas e extremidades do fio ou por impurezas.

¹⁰Todo o formalismo também pode ser aplicado ao caso das cavidades, dadas certas adaptações.

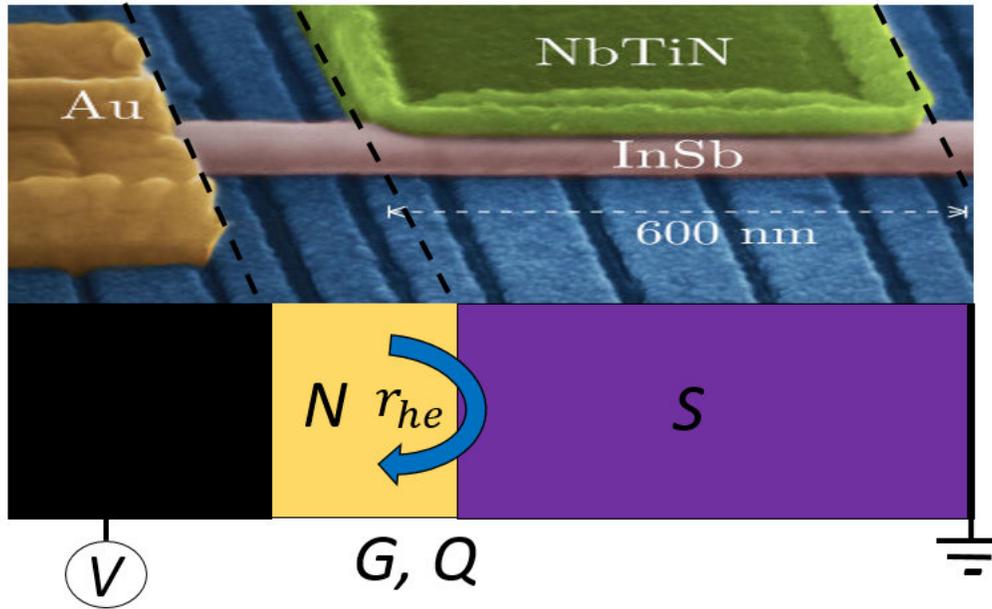


Figura 1.5: Na parte superior vemos uma imagem real de um dispositivo similar ao estudado neste trabalho, onde a supercondutividade é induzida numa parte do fio (*InSb*) pela proximidade dele com um supercondutor (*NbTiN*). A pequena parte entre o eletrodo (*Au*) e o supercondutor induzido corresponde ao guia normal junto com o centro espalhador. Na parte inferior temos um esboço deste mesmo sistema, figuras retiradas de [8, 9].

Um tratamento completo da abordagem Hamiltoniana, bem como de todo o tenfold way, pode ser encontrado nas referências [7, 8, 11].

1.2.2 A Reflexão de Andreev

Dissemos na seção anterior que para o sistema analisado nesta dissertação, no regime de reposta linear, o único mecanismo responsável pelo transporte de carga na interface NS é conhecido como reflexão de Andreev¹¹, a figura 1.6 resume o processo.

Basicamente, pode-se dizer que na reflexão normal acontece o esperado classicamente, porém, no caso da reflexão de Andreev, quando o elétron incide na interface supercondutora, ele é um estado de quasi-partícula proibido para esta região, portanto ocorre uma retroreflexão de um estado buraco na região normal [4] (*sob a mesma trajetória do elétron incidente*). Outras características importantes das duas reflexões são:

- **A carga é conservada na reflexão normal, mas não na reflexão de Andreev**

A partícula refletida (*buraco*) tem a carga exatamente oposta a da partícula incidente (*elétron*). Olhando para figura 1.6 (*direita*) e relacionando as cargas do elétron ($q_e =$

¹¹Por volta de 1963, Andreev notou que a reflexão do elétron nesta interface era incomum [12].

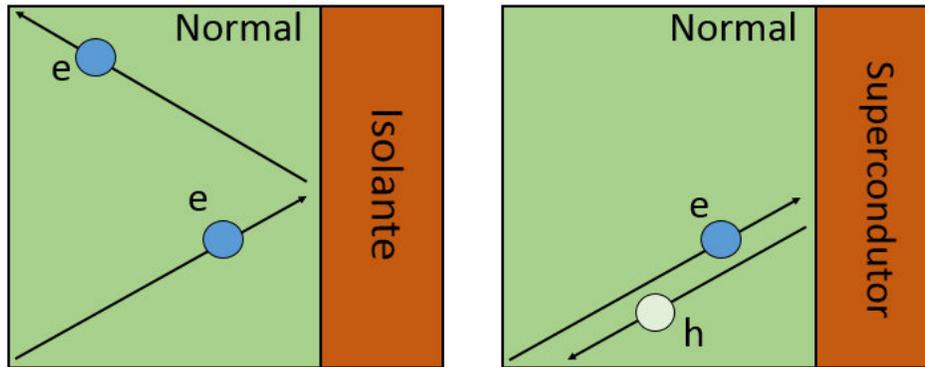


Figura 1.6: Esboço do processo da reflexão de Andreev. Na esquerda, uma reflexão normal do elétron por um isolante e na direita temos a reflexão do elétron por um supercondutor, figura adaptada de [12].

$-e$) e buraco ($q_h = +e$) podemos facilmente ver que:

$$\Delta q = q_{final} - q_{inicial} = 2e \quad (1.7)$$

Localmente falando, esta carga $2e$ está perdida, mas globalmente, ela será absorvida pelo estado fundamental supercondutor como um par Cooper¹²;

- **O momento não é conservado na reflexão normal e se conserva na reflexão de Andreev**

Sabemos que o momento de uma partícula depende de sua velocidade, analisando as duas reflexões por meio da figura 1.6 percebe-se claramente que há uma mudança na direção e sentido do vetor velocidade do elétron no caso normal e portanto mudança no momento. Para a reflexão de Andreev a partícula refletida volta pelo mesmo caminho da partícula incidente, neste caso temos uma inversão do vetor velocidade e assim conservação do momento¹³;

- **A energia é conservada nas duas situações**

Consideramos a reflexão de Andreev um processo elástico de espalhamento e como tal temos conservação da energia, em suma um elétron de energia (E) acima do nível de Fermi é convertido em um buraco com energia ($-E$) abaixo do nível fermiônico. Neste trabalho, para meios de simplificação matemática, vamos adotar uma energia exatamente no nível de fermi ($E = 0$), apesar disso, veremos que esta presunção será razoável;

¹²A resposta de como isso ocorre é justamente do que se trata a teoria BCS, citada na seção anterior.

¹³Esta é uma explicação razoável, mas aproximada.

- **O spin também é conservado nas duas situações**

No caso da reflexão de Andreev, para haver conservação do spin os buracos refletidos devem ter o spin "contrário" ao dos elétrons incidentes. Felizmente estas mudanças na orientação dos spins, que complicam o tratamento matemático, podem ser ignoradas caso as propriedades de espalhamento do metal normal forem independentes do spin.

Nas seções subsequentes, mostraremos como os principais observáveis do transporte mesoscópico se relacionam com a reflexão de Andreev [52].

1.3 Teoria de Espalhamento

Afirmamos que a abordagem utilizada seria via matriz de espalhamento, e portanto vamos fazer um resumo dos aspectos mais relevantes da teoria de espalhamento. Landauer foi o primeiro a concretizar a ideia de que a corrente no condutor podia ser expressa em termos da probabilidade do elétron ser transmitido por este mesmo condutor. Logo depois Büttiker generalizou este resultado para casos de muitos terminais envolvidos e também presença de campo magnético [13].

O formalismo de Landauer-Buttiker para os casos de um condutor normal e posteriormente adaptado para o caso normal-supercondutor, será devidamente apresentado nas próximas seções. Antes disso, vamos analisar o personagem principal desta abordagem de espalhamento, a matriz espalhamento (*ou matriz S*) que é responsável por toda a informação do transporte eletrônico no sistema mesoscópico. Ela que conecta as amplitudes das ondas que entram com as que saem no condutor. Vamos iniciar analisando a figura 1.7, respeitando toda série de restrições plausíveis¹⁴ e escrever a matriz espalhamento para este exemplo típico [2].

¹⁴Guias ideais, reservatórios agindo como fontes/sumidouros perfeitos, baixas temperaturas, regime linear, etc.

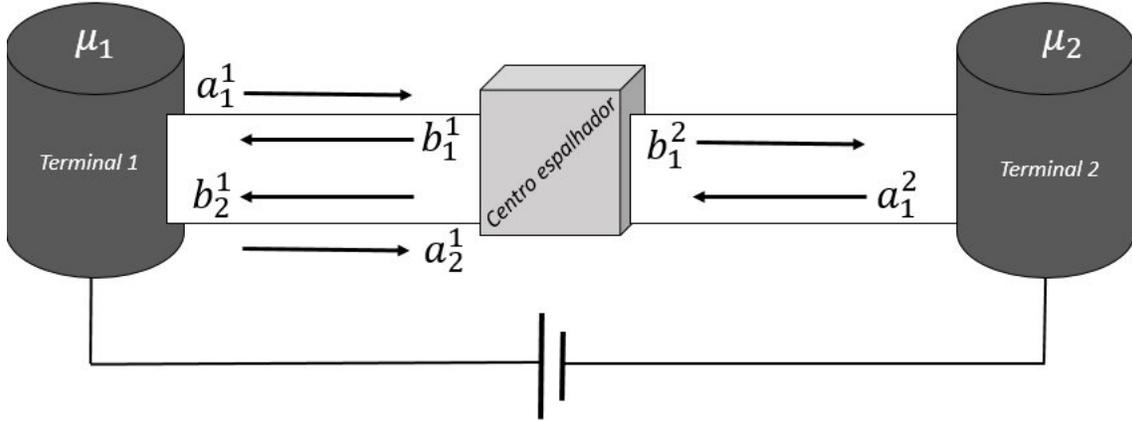


Figura 1.7: Exemplo de um problema de espalhamento com 2 terminais ligados por guias ideais e três canais abertos. Os reservatórios estão a potenciais eletroquímicos μ_1 e μ_2 , respectivamente. As letras "a" representam as amplitudes das ondas que entram no condutor coerente e "b" as amplitudes das ondas que saem dele, também respectivamente.

De certo, a , b e S estão relacionados como se segue

$$b = S a \quad (1.8)$$

onde b e a simplesmente representam os vetores coluna correspondentes as amplitudes das ondas de saída e entrada do condutor, respectivamente, da mesma forma que S representa a nossa matriz espalhamento. Avançamos discriminando os guias e canais envolvidos no problema.

$$\begin{aligned} b_1^1 &= S_{11}^{11} a_1^1 + S_{12}^{11} a_2^1 + S_{11}^{12} a_1^2 \\ b_2^1 &= S_{21}^{11} a_1^1 + S_{22}^{11} a_2^1 + S_{21}^{12} a_1^2 \\ b_1^2 &= S_{11}^{21} a_1^1 + S_{12}^{21} a_2^1 + S_{12}^{22} a_1^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Que para a e b o índice superior indica o guia e o inferior indica o canal, que também vale para os termos de S . A figura 1.8 esquematiza como a matriz S acopla as informações referentes as amplitudes das ondas incidentes e refletidas, por exemplo, no sistema de equações 1.9 vemos que S_{12}^{11} indica que parte da onda refletida "b" (no canal e guia 1) veio justamente da onda incidente "a" (do canal 2 do guia 1).

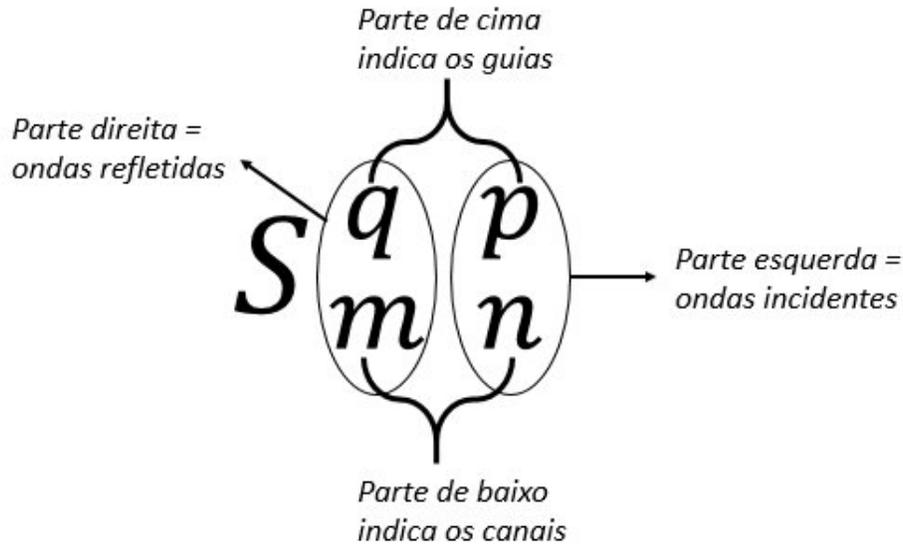


Figura 1.8: Notação adotada nesta dissertação, a qual já nos permite perceber que quando $q = p$ teremos reflexão e quando $q \neq p$ teremos então, transmissão.

Uma forma prática de montar esta relação é a seguinte:

- Cada b vai ser igual a soma de todos os a 's existentes nos guias e canais, todos eles com seus respectivos índices superiores e inferiores;
- Depois, cada um desses a 's estará ligado um termo da matriz S com 4 índices, como mostrado no esquema da figura 1.8;
- Basta notar que cada um destes S 's vai possuir primeiramente os índices do " b " daquela linha, e logo depois os índices do " a " ao qual ele está ligado, apenas compare estas informações com o sistema de equações 1.9.

Desta forma, o sistema de equações pode ser reescrito de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}^{11} & S_{12}^{11} & S_{11}^{12} \\ S_{21}^{11} & S_{22}^{11} & S_{21}^{12} \\ S_{11}^{21} & S_{12}^{21} & S_{12}^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_1^2 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Vamos agora resumir algumas outras propriedades importantes da matriz espalhamento. Iniciamos percebendo que, ainda neste caso, S tem dimensão (3×3) , que é o número de canais abertos definidos inicialmente, mas de fato, em geral:

$$N_T(E) = \sum_{p=1}^M N_p(E). \quad (1.11)$$

$N_p(E)$ corresponde ao número total de canais abertos no guia p e M é o número de guias (*ou terminais*), portanto, S será sempre uma matriz quadrada e terá dimensão numericamente igual a soma dos números de canais abertos em todos os guias do sistema, ou seja, N_T x N_T . Tomando um canal aberto em ambos os guias, é conhecido que a probabilidade de transmissão é obtida pelo módulo quadrado do correspondente elemento na matriz de espalhamento

$$T_{pq} = |S_{pq}|^2. \quad (1.12)$$

Que justamente é a probabilidade que um elétron tem de passar do guia p para o guia q ¹⁵, seguindo no mesmo raciocínio, temos para probabilidade de reflexão

$$R_{pp} = |S_{pp}|^2. \quad (1.13)$$

Resultando em

$$R_{pp} = 1 - \sum_{q \neq p}^{N_T} T_{pq}. \quad (1.14)$$

A conservação da carga restringe que a soma de todas as amplitudes das ondas que entram no condutor tem de ser igual a soma das amplitudes das ondas que saem do mesmo¹⁶, com isso em mente, podemos escrever

$$\sum_m |a_m|^2 = \sum_m |b_m|^2, \quad (1.15)$$

$$\sum_m a_m a_m^\dagger = \sum_m b_m b_m^\dagger. \quad (1.16)$$

Onde concluímos que

¹⁵Onde $0 < |S_{pq}|^2 < 1$

¹⁶Caso contrário, a corrente elétrica total seria diferente dessa soma (*transmitida + refletida*) e obviamente isso não pode acontecer.

$$\text{Tr}(aa^\dagger) = \text{Tr}(bb^\dagger). \quad (1.17)$$

Agora voltando a equação 1.8, vemos o seguinte

$$b = S a, \quad (1.18)$$

$$b^\dagger = a^\dagger S^\dagger. \quad (1.19)$$

Multiplicando estas duas equações, teremos

$$bb^\dagger = S aa^\dagger S^\dagger. \quad (1.20)$$

e tomando o traço

$$\text{Tr}(bb^\dagger) = \text{Tr}(aa^\dagger S S^\dagger). \quad (1.21)$$

Ficando claro que para ocorrer a igualdade em 1.17, temos de ter a unitariedade da matriz espalhamento

$$S S^\dagger = \mathbf{1}, \quad (1.22)$$

ou seja

$$S^\dagger = S^{-1}. \quad (1.23)$$

Que em termos dos seus elementos, pode ser representado por

$$\sum_{m=1}^{N_T} |S_{mn}|^2 = \sum_{m=1}^{N_T} |S_{nm}|^2 = 1. \quad (1.24)$$

Nos dizendo que a transmissão entre dois guias quaisquer é a mesma, independente de o espalhamento ser de um guia n para um guia m ou vice-versa. A matriz espalhamento ainda

pode ser representada numa forma condensada para este caso de dois terminais, por meio de seus blocos de reflexão (r e r') e transmissão (t e t'), da seguinte forma

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Ainda neste contexto, vale explorar uma característica importante envolvendo a relação entre a matriz espalhamento e a simetria de reversão temporal (SRT), que é um dos ingredientes fundamentais da teoria de matrizes aleatórias TMA , que será o foco da seção 1.7. Podemos entender a SRT com base no que foi feito em [14], para partículas sem spin¹⁷ a função de onda dependente do tempo é dada por

$$\Psi(r, t) = \psi(r, 0)e^{iEt/\hbar}. \quad (1.26)$$

A operação de inversão no tempo: $t \rightarrow -t$, simplesmente resulta em: $\Psi(r, t) \rightarrow \Psi^*(r, t)$, ou seja, a reversão temporal está relacionada com a presença de uma nova função de onda (*só que conjugada complexa e no sentido oposto*). Utilizando essas ideias e levando em conta a temática das amplitudes das ondas incidentes e refletidas a e b , juntamente com o auxílio da figura 1.7, podemos notar que a equação 1.8 equivalente ao caso revertido no tempo será

$$a^* = S b^*. \quad (1.27)$$

Conjugando os dois termos e multiplicando-os por $(S^*)^{-1}$

$$(S^*)^{-1}a = (S^*)^{-1} S^* b. \quad (1.28)$$

Onde

$$b = (S^*)^{-1}a. \quad (1.29)$$

Desta forma, fazendo uma comparação com equação 1.8, notamos que

$$S = (S^*)^{-1}, \quad (1.30)$$

¹⁷Aparecem complicações quando envolvemos spin, veja por exemplo [13] e [14]

ou ainda

$$SS^* = \mathbf{1}. \quad (1.31)$$

Este resultado e o fato da unitariedade de S expresso pela equação 1.22 nos leva a concluir que

$$S = S^T. \quad (1.32)$$

Portanto, nestes tipos de sistemas, quando a matriz de espalhamento descrever fenômenos que preservam a simetria de reversão temporal, percebemos que ela é também simétrica [15], ($S_{ij} = S_{ji}$).

Levando em conta estas considerações¹⁸, encontraremos nas próximas seções e capítulos, dois dos mais importantes observáveis do transporte mesoscópico, a condutância (*a chamada fórmula de Landauer*) e a potência do ruído de disparo, nos casos de condutores normais e supercondutores.

1.4 Teoria de Landauer-Buttiker para Metais Normais (N)

Dentro do regime de transporte mesoscópico os efeitos de interferência quânticos aparecem e as teorias totalmente clássicas não são mais suficientes para explicar estes efeitos. Uma abordagem poderosa quando há transporte coerente através do condutor é a chamada Teoria de Landauer-Büttiker. Inicialmente criada por Landauer e posteriormente generalizada por Büttiker, esta abordagem relaciona a corrente que atravessa o condutor com a probabilidade do elétron ser transmitido [2]. Os dois personagens principais desta abordagem são justamente a matriz espalhamento S , como vimos, ela relaciona as amplitudes das ondas incidentes e refletidas, e a equação da massa efetiva, usualmente utilizada quando estudamos a dinâmica de elétrons na banda de condução mesoscópica. Com estes ingredientes chegaremos aos principais observáveis de transporte, condutância e ruído de disparo [4], tanto no caso de um condutor coerente normal (N) quanto numa junção entre um condutor

¹⁸Podendo ser visto detalhadamente em [2, 13, 16, 17].

normal e um supercondutor (NS). Seguindo o desenvolvimento feito em [4, 13, 18], vamos considerar o sistema mesoscópico da figura 1.9 (*bem semelhante ao sistema da figura 1.7 da seção anterior*). Os reservatórios servem como fontes (*ou sumidouros*) perfeitos de portadores de carga, portanto com probabilidade zero de retransmissão dos elétrons que passam dos guias para os reservatórios. Estes elétrons tem distribuição dada pela função distribuição de Fermi

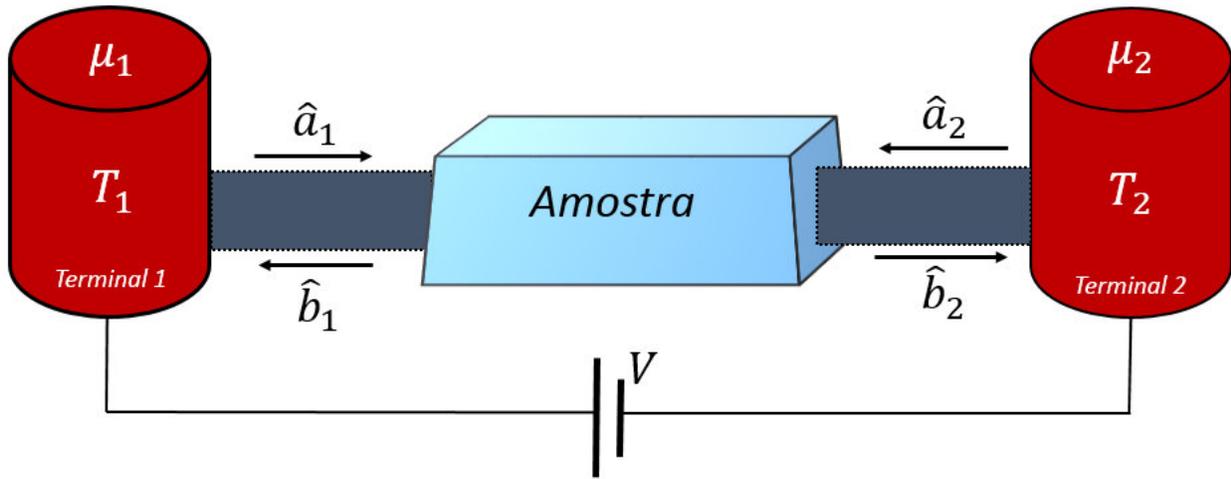


Figura 1.9: Esquema de um problema de espalhamento com 2-terminais e um canal aberto. Os reservatórios 1 (*esquerda*) e 2 (*direita*) estão a temperaturas T_1 e T_2 e potenciais eletroquímicos μ_1 e μ_2 , respectivamente

$$f_\alpha(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_\alpha}{k_B T_\alpha}} + 1} \quad (1.33)$$

Onde α corresponde neste caso a 1 ou 2. Introduzindo os operadores, que aparecem na figura 1.9, de criação e aniquilação de elétrons nos estados de espalhamento:

- $\hat{a}_n^{\dagger l}(E)$ e $\hat{a}_n^l(E)$: entrando na amostra, criam e aniquilam elétrons com energia total E nos canais n do guia l .
- $\hat{b}_n^{\dagger l}(E)$ e $\hat{b}_n^l(E)$: saindo da amostra, criam e aniquilam elétrons com energia total E nos canais n do guia l .

Estes operadores satisfazem as relações de anti-comutação descritas abaixo

$$\hat{a}_n^{\dagger l}(E)\hat{a}_{n'}^l(E') + \hat{a}_{n'}^l(E')\hat{a}_n^{\dagger l}(E) = \delta_{nn'}\delta(E - E'); \quad (1.34)$$

$$\hat{a}_n^l(E)\hat{a}_{n'}^l(E') + \hat{a}_{n'}^l(E')\hat{a}_n^l(E) = 0 = \hat{a}_n^{\dagger l}(E)\hat{a}_{n'}^{\dagger l}(E') + \hat{a}_{n'}^{\dagger l}(E')\hat{a}_n^{\dagger l}(E). \quad (1.35)$$

Todas válidas também para o operador \hat{b} . Avançamos montando as relações entre estes dois operadores e a matriz espalhamento, fazemos isso da mesma forma que foi montado o sistema de equações 1.9 na seção anterior, portanto

$$\hat{b}_n^l = \sum_{\alpha,k} S_{n,k}^{l,\alpha} \hat{a}_k^\alpha; \quad (1.36)$$

$$\hat{b}_n^{\dagger l} = \sum_{\alpha,k} (S_{n,k}^{l,\alpha})^* \hat{a}_k^{\dagger\alpha} = \sum_{\alpha,k} (S^\dagger)_{k,n}^{\alpha,l} \hat{a}_k^{\dagger\alpha}. \quad (1.37)$$

A densidade de corrente de probabilidade, que em um certo ponto do espaço e instante de tempo, nos diz se a probabilidade de encontrarmos a partícula neste ponto aumenta ou diminui. Esta é definida por [19]

$$\mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \nabla \Psi^\dagger - \Psi^\dagger \nabla \Psi), \quad (1.38)$$

onde Ψ é a função de onda da partícula e solução da equação de Schrödinger. A corrente elétrica que atravessa um dos guias fica determinada pela integração de cada elemento de corrente disposto sobre todos os modos transversais (*multiplicada pela carga do elétron*). No formalismo da segunda quantização o operador corrente é dado por

$$\hat{I}_l = \frac{\hbar e}{2im} \int dy_l \left[\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) \frac{\partial \hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t)}{\partial x_l} - \hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) \frac{\partial \hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t)}{\partial x_l} \right], \quad (1.39)$$

onde $\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t)$ é uma combinação linear das funções de onda no guia l e conhecida como operador de campo:

$$\hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) = \sum_n \left[\varphi_{l,n}^+(\vec{r}_l) \hat{a}_n^l(t) + \varphi_{l,n}^-(\vec{r}_l) \hat{b}_n^l(t) \right], \quad (1.40)$$

$$\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) = \sum_n \left[\varphi_{l,n}^{+*}(\vec{r}_l) \hat{a}_n^\dagger(t) + \varphi_{l,n}^{-*}(\vec{r}_l) \hat{b}_n^\dagger(t) \right]. \quad (1.41)$$

Com

$$\varphi_{l,n}^\pm(\vec{r}_l) = \frac{e^{\pm ik_{l,n}x_l}}{(\hbar k_{l,n}/m)^{\frac{1}{2}}} \chi_n(y_l), \quad (1.42)$$

onde os sinais indicam o sentido horizontal das ondas incidentes e refletidas, $\chi_n(y_l)$ é sua parte transversal quantizada e o termo restante corresponde a sua parte longitudinal. A dependência com a energia é alcançada aplicando a seguinte transformada de Fourier

$$\hat{a}_n^l(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dE \hat{a}_n^l(E) e^{-iE\frac{t}{\hbar}}, \quad (1.43)$$

$$\hat{a}_n^l(E) = \int dt \hat{a}_n^l(t) e^{iE\frac{t}{\hbar}}. \quad (1.44)$$

Que também são análogas para os outros operadores: $\hat{a}_n^{\dagger l}(t)$, $\hat{b}_n^l(t)$ e $\hat{b}_n^{\dagger l}(t)$. Substituindo estas transformadas e a equação 1.42 nas respectivas expressões dos operadores de campo 1.40 e 1.41, chegamos a

$$\hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) = \int dE e^{-iE\frac{t}{\hbar}} \sum_n \frac{\chi_n(y_l)}{\sqrt{2\pi\hbar v_{l,n}(E)}} \left[\hat{a}_n^l(E) e^{ik_{l,n}x_l} + \hat{b}_n^l(E) e^{-ik_{l,n}x_l} \right], \quad (1.45)$$

$$\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) = \int dE e^{iE\frac{t}{\hbar}} \sum_n \frac{\chi_n^*(y_l)}{\sqrt{2\pi\hbar v_{l,n}(E)}} \left[\hat{a}_n^{\dagger l}(E) e^{-ik_{l,n}x_l} + \hat{b}_n^{\dagger l}(E) e^{ik_{l,n}x_l} \right]. \quad (1.46)$$

A velocidade dos elétrons no n-ésimo canal do guia l foi representada por: $v_{l,n}(E) = \frac{\hbar k_{l,n}}{m}$. Por fim, substituindo as equações 1.45, 1.46 e suas respectivas derivadas na equação do operador corrente 1.39, chegamos, com alguns passos e organizando os termos semelhantes, a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\hat{I}_l(x, t) = & \frac{e}{4\pi\hbar} \sum_n \iint dE dE' e^{i(E-E')\frac{t}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{v_{l,n}(E)v_{l,n}(E')}} \\
& \{ [v_{l,n}(E) + v_{l,n}(E')] [e^{ix_l[k_{l,n}(E') - k_{l,n}(E)]} \hat{a}_n^{\dagger l}(E) \hat{a}_n^l(E') - \\
& \quad e^{ix_l[k_{l,n}(E) - k_{l,n}(E')] } \hat{b}_n^{\dagger l}(E) \hat{b}_n^l(E')] \\
& + [v_{l,n}(E) - v_{l,n}(E')] [e^{-ix_l[k_{l,n}(E) - k_{l,n}(E')] } \hat{a}_n^{\dagger l}(E) \hat{b}_n^l(E') - \\
& \quad e^{ix_l[k_{l,n}(E') - k_{l,n}(E)] } \hat{b}_n^{\dagger l}(E) \hat{a}_n^l(E')] \}. \tag{1.47}
\end{aligned}$$

Claramente complicadíssima e ainda depende de uma coordenada indesejada (x_l), foi aqui onde Büttiker propôs uma simplificação importante, a maioria dos elétrons responsáveis pelo transporte estão confinados no mar de Fermi com energia próximas a E_F , isso quer dizer que as velocidades da maioria dos portadores de carga são praticamente iguais ou muito próximas, assim teremos $v_{l,n}(E) \simeq v_{l,n}(E')$ e portanto, temos uma drástica simplificação na expressão 1.47

$$\hat{I}_l(t) = \frac{e}{h} \sum_n \int \int dE dE' e^{i(E-E')\frac{t}{\hbar}} [\hat{a}_n^{\dagger l}(E) \hat{a}_n^l(E') - \hat{b}_n^{\dagger l}(E) \hat{b}_n^l(E')]. \tag{1.48}$$

É conveniente, trabalhar esta equação para que ela fique em termos da matriz espalhamento. Usamos as relações 1.36 e 1.37 apresentadas anteriormente, temos

$$\hat{a}_n^{\dagger l}(E) \hat{a}_n^l(E') - \hat{b}_n^{\dagger l}(E) \hat{b}_n^l(E') = \sum_{\alpha, \beta, k, m, n} \hat{a}_m^{\dagger \alpha}(E) \left[\delta_{\alpha, l} \delta_{\beta, l} \delta_{m, n} \delta_{k, n} - (S^\dagger)_{mn}^{\alpha l}(E) S_{nk}^{l \beta}(E') \right] \hat{a}_k^\beta(E'). \tag{1.49}$$

Substituindo esta expressão na equação 1.48 podemos escrever

$$\hat{I}_l(t) = \frac{e}{h} \sum_{\alpha \beta} \sum_{mk} \int \int dE dE' e^{i(E-E')\frac{t}{\hbar}} [\hat{a}_m^{\dagger \alpha}(E) A_{mk}^{\alpha \beta}(l; E, E') \hat{a}_k^\beta(E')]. \tag{1.50}$$

onde definimos a partir do isolamento do somatório em n na equação 1.49, a seguinte relação

$$A_{mk}^{\alpha \beta}(l; E, E') \equiv \left[\delta_{\alpha, l} \delta_{\beta, l} \delta_{m, k} - \sum_n (S^\dagger)_{mn}^{\alpha l}(E) S_{nk}^{l \beta}(E') \right]. \tag{1.51}$$

1.4.1 Condutância (G_N)

No regime de resposta linear a condutância é dada por

$$G = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle I \rangle}{V}. \quad (1.52)$$

Para o sistema considerado, em equilíbrio térmico e os elétrons com distribuição igual a dos reservatórios, a média estatística quântica do produto dos operadores de criação e aniquilação é definida por [13, 18]

$$\langle \hat{a}_m^{\dagger\alpha}(E) \hat{a}_k^\beta(E') \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{m,k} \delta(E - E') f_\alpha(E). \quad (1.53)$$

Desta forma, a média do operador corrente se torna

$$\langle \hat{I}_l \rangle = \frac{e}{\hbar} \sum_\alpha \sum_m \int dE A_{mm}^{\alpha\alpha}(l; E) f_\alpha(E). \quad (1.54)$$

Usando a relação 1.51 podemos abrir o somatório em α como se segue

$$\sum_{\alpha,m} A_{mm}^{\alpha\alpha}(l; E) f_\alpha(E) = \left(\delta_{1l} - \sum_n (S^\dagger)_{mn}^{1l} S_{nm}^{l1} \right) f_1(E) + \left(\delta_{2l} - \sum_n (S^\dagger)_{mn}^{2l} S_{nm}^{l2} \right) f_2(E). \quad (1.55)$$

e aproveitando a unitariedade da matriz espalhamento a corrente no guia 1 será

$$\sum_{\alpha,m} A_{mm}^{\alpha\alpha}(l; E) f_\alpha(E) = Tr(t^\dagger t) [f_1(E) - f_2(E)]. \quad (1.56)$$

Substituindo este resultado na equação 1.54, temos

$$\langle \hat{I} \rangle = \frac{e}{\hbar} \int dE Tr(t^\dagger t) [f_1(E) - f_2(E)], \quad (1.57)$$

onde $f_1 = f(E - E_F - eV)$ e $f_2 = f(E - E_F)$. Agora evocamos o regime linear a baixas

tensões e o teorema fundamental do cálculo para integrais, nos levando a

$$\begin{aligned} f_1(E) - f_2(E) &= f(E - E_F - eV) - f(E - E_F), \\ &= \int_{E_F}^{E_F + eV} dE' \frac{\partial f(E - E')}{\partial E'} \simeq \left(-\frac{\partial f(E - E_F)}{\partial E} \right) eV. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Observando novamente a definição da condutância dada pela equação 1.52 e também fazendo uso das equações 1.58 e 1.57 chegamos a

$$G = \frac{e}{h} \int dE \left(-\frac{\partial f(E - E_F)}{\partial E} \right) eV \text{Tr}(t^\dagger(E)t(E)) \quad (1.59)$$

Particularmente para $T \rightarrow 0$, a função distribuição de Fermi toma a forma da função degrau, como mostra a figura 1.10. No caso de $T = 0$, todos os estados estão preenchidos até E_F , conseqüentemente, ao elevar lentamente a temperatura, o degrau vai suavizando [19]. Neste contexto, a função distribuição de Fermi satisfaz a relação $\frac{\partial f(E - E_F)}{\partial E} = -\delta(E - E_F)$, permitindo alterar a equação 1.59, nos levando a conhecida fórmula de Landauer, que no caso de partículas sem spin tem a forma

$$G_N = \frac{e^2}{h} \text{Tr}(t^\dagger t). \quad (1.60)$$

onde o sub-índice N em G está indicando apenas que estamos tratando do condutor normal. Podemos ainda, diagonalizando a matriz $t^\dagger t$, obter a condutância adimensional como a soma dos autovalores de transmissão

$$g = \frac{G}{e^2/h} = \sum_n \tau_n. \quad (1.61)$$

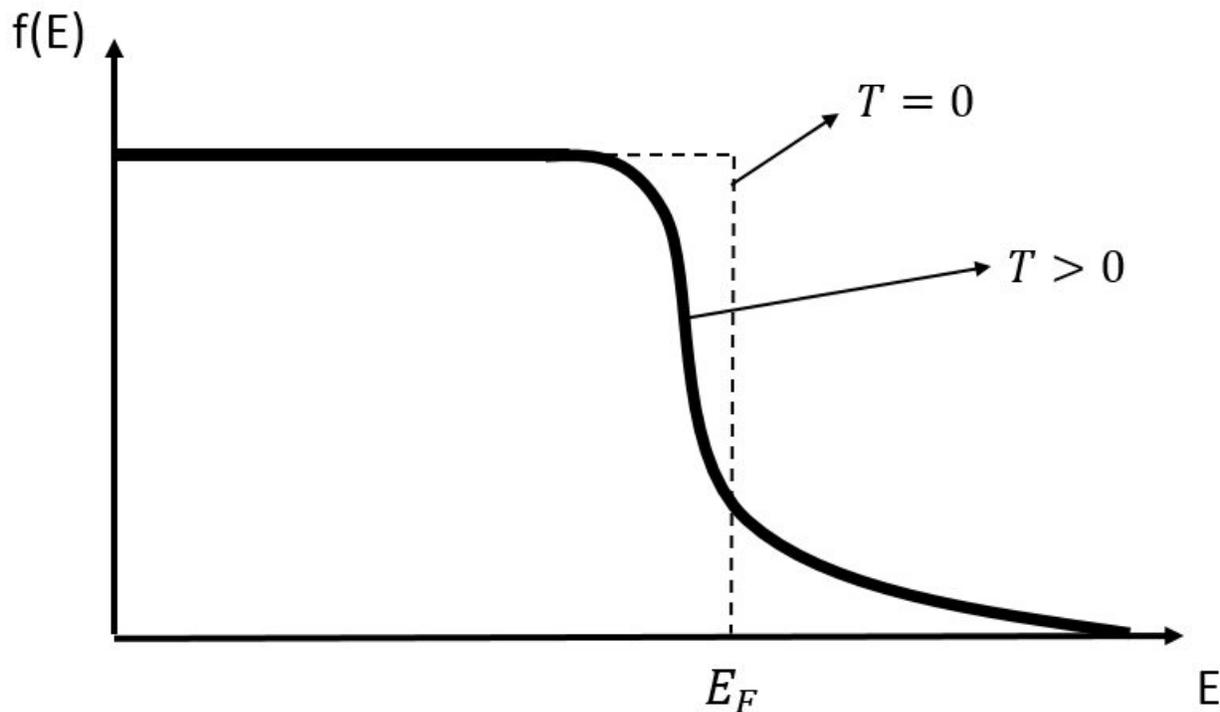
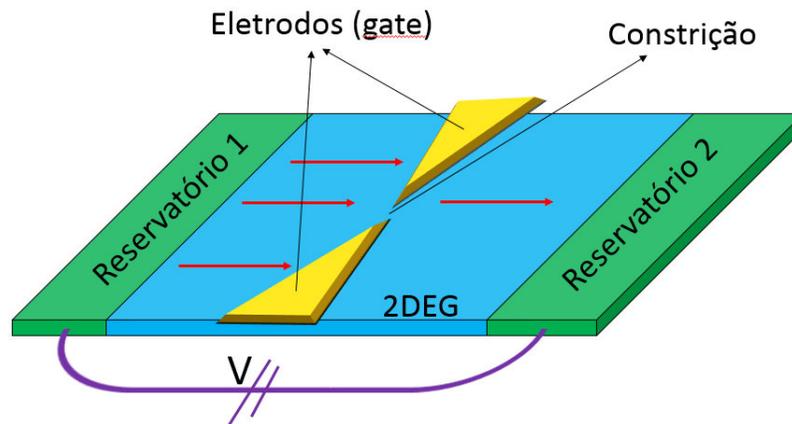
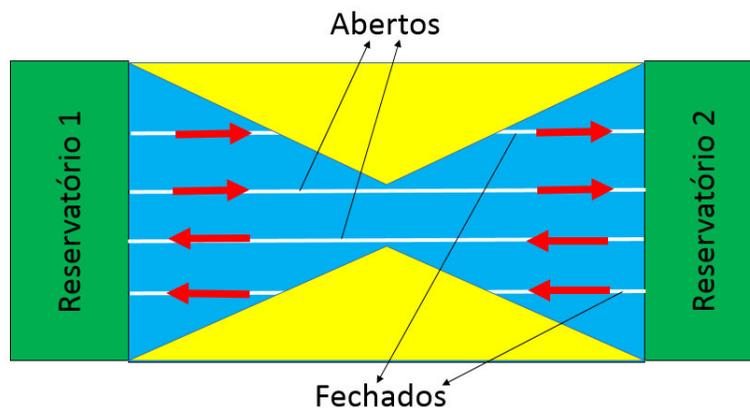


Figura 1.10: Distribuição de Fermi para temperaturas levemente diferentes, figura adaptada de [19]

Importante notar que se na equação 1.61 τ_n for igual a uma probabilidade de transmissão idêntica para cada guia T , então $g = NT$, indicando uma quantização da condutância. Os avanços experimentais citados no início deste capítulo, permitiram que por volta de 1988 fossem introduzidos eletrodos carregados negativamente no chamado gás de elétrons bidimensional (*2DEG*), o que revolucionou o estudo do transporte nas heteroestruturas. Isso culminou na constatação da fórmula de Landauer, num fenômeno conhecido como quantização da condutância [3]. Uma forma simplificada deste experimento é mostrado na figura 1.11. A constrição formada pela presença dos eletrodos é ajustável e controlada por meio da voltagem aplicada, que por sua vez cria uma barreira de potencial, todo este mecanismo controla o fluxo de elétrons que podem atravessar a barreira (*por meio da abertura e fechamento de canais de transmissão*) e portanto atravessar a constrição, um detalhe importante pode ser visto na figura 1.12. Ela mostra que G diminui em forma de degraus discretos com o fechamento da constrição, cada degrau vale $\frac{2e^2}{h}$, o que é conhecido por quantum de condutância, onde o fator 2 leva em conta a degenerescência do spin [2].



(a) Ponto quântico



(b) Modos transversais

Figura 1.11: (a) Representação do ponto de contato quântico construído sobre um *2DEG*, os eletrodos amarelos formam a constricção. (b) A quantização da condutância pode ser obtida considerando a constricção como um guia de onda, no qual um pequeno número de modos transversais ou canais de propagação podem atravessar a constricção, figuras adaptadas de [3].

1.4.2 Flutuações Temporais da Corrente

Podemos continuar utilizando a teoria de espalhamento para estudarmos outras propriedades importantes do transporte [13]. De fato temos dois tipos importantes de flutuação, como as flutuações universais, que estão ligadas a medições de correntes com relação a outros parametros como presença de campo magnético ou energia, porém elas independem do tempo. O outro tipo é justamente a flutuação da corrente que depende do tempo, por exemplo, se for enviado um elétron em direção a uma barreira, todas as vezes que o elétron atravessa-lá, veremos um pico de corrente, conseqüentemente com a passagem do tempo, teremos uma série de picos, indicando uma flutuação temporal. A flutuação temporal da

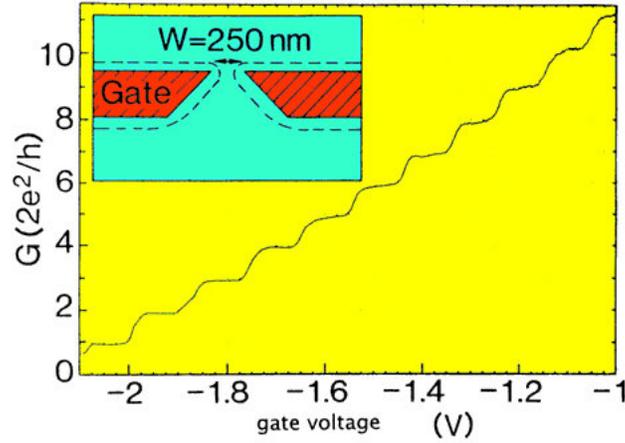


Figura 1.12: Medidas da condutância versus gate de voltagem, figura retirada de [2]

corrente é definida por

$$\Delta \hat{I}_l(t) = \hat{I}_l(t) - \langle \hat{I}_l(t) \rangle. \quad (1.62)$$

De certo, se não tivéssemos a discreteza da carga eletrônica a média $\langle \hat{I}_l(t) \rangle$ forneceria a própria corrente elétrica e não teríamos flutuação, o que não ocorre. A função de correlação da corrente nos diferentes contatos é definida por [18]

$$\langle \Delta \hat{I}_l(t + t_0) \Delta \hat{I}_l(t_0) \rangle = \langle \hat{I}_l(t + t_0) \hat{I}_l(t_0) \rangle - \langle \hat{I}_l(t + t_0) \rangle \langle \hat{I}_l(t_0) \rangle. \quad (1.63)$$

Tomamos agora a transformada de Fourier de frequência desta função de correlação e como resultado obtemos

$$P(w) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iwt} \langle \Delta \hat{I}_l(t + t_0) \Delta \hat{I}_l(t_0) \rangle. \quad (1.64)$$

A saber, $P(w)$ é chamada de potência do espectro ou densidade espectral. Para encontrá-la precisamos do teorema de Wick, que reduz de forma eficaz o produto entre vários operadores de criação e aniquilação a uma soma de produtos destes mesmos operadores. No nosso caso, para um gás de férmions no equilíbrio, teremos

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{a}_m^{\dagger\alpha}(E_1)\hat{a}_k^\beta(E_2)\hat{a}_r^{\dagger\gamma}(E_3)\hat{a}_s^\delta(E_4) \right\rangle - \left\langle \hat{a}_m^{\dagger\alpha}(E_1)\hat{a}_k^\beta(E_2) \right\rangle \left\langle \hat{a}_r^{\dagger\gamma}(E_3)\hat{a}_s^\delta(E_4) \right\rangle = \\ \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{ms}\delta_{rk}\delta(E_1 - E_4)\delta(E_2 - E_3)f_\alpha(E_1)[1 - f_\beta(E_2)]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Usando a equação 1.54, o teorema de Wick e algumas propriedades da transformada de Fourier, a densidade espectral se torna

$$P(w) = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha\beta} \sum_{mk} \int dE A_{mk}^{\alpha\beta}(E, E + \hbar w) A_{km}^{\beta\alpha}(E + \hbar w, E) f_\alpha(E)[1 - f_\beta(E + \hbar w)]. \quad (1.66)$$

Esta equação é geral, mas não representa a realidade física quando deixamos as frequências livres para qualquer valor (*conservação da corrente, por exemplo, não é satisfeita para toda frequência*), por isso costumasse restringi-la zerando a componente de frequência w , e portanto

$$P(0) = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha\beta} \sum_{mk} \int dE A_{mk}^{\alpha\beta}(E, E) A_{km}^{\beta\alpha}(E, E) f_\alpha(E)[1 - f_\beta(E)]. \quad (1.67)$$

Precisamos fazer a ligação com a teoria de espalhamento, colocando esta equação em termos da matriz espalhamento. Para isso utilizamos a definição de $A_{mk}^{\alpha\beta}(l; E, E')$ e novamente a unitariedade da matriz espalhamento, chegando assim a uma das mais importantes equações da física de sistemas mesoscópicos

$$P = \frac{2e^2}{h} \int dE \left\{ [f_1(1 - f_2) + f_2(1 - f_1)] Tr(t^\dagger t r^\dagger r) + [f_1(1 - f_1) + f_2(1 - f_2)] Tr(t^\dagger t)^2 \right\} \quad (1.68)$$

1.4.3 O Ruído Térmico

Agora faremos duas considerações importantes da equação 1.68, a primeira diz respeito ao sistema estar em equilíbrio térmico, quando isso ocorre as funções de distribuição nos dois

reservatórios coincidem, assumindo o valor comum $f(E)$, portanto a equação 1.68 se torna

$$P = \frac{4e^2}{h} \int dE f(1-f) \text{Tr}(t^\dagger t). \quad (1.69)$$

Evocando uma identidade conhecida da mecânica estatística [20], $f(1-f) = -K_B T \frac{\partial f}{\partial E}$, chegamos a

$$P = \frac{4e^2}{h} K_B T \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \text{Tr}(t^\dagger t) \right). \quad (1.70)$$

Esta expressão é conhecida como ruído térmico (*ou Nyquist-Jonhson*), o qual tem origem nas flutuações térmicas dos números de ocupação nos reservatórios. Na seção anterior, vimos que a condutância pode ser escrita como

$$G = \frac{e^2}{h} \int dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \text{Tr}(t^\dagger t) \right). \quad (1.71)$$

Pela comparação, podemos escrever o ruído térmico na forma compacta a seguir

$$P = 4K_B T G. \quad (1.72)$$

Portanto, encontramos uma expressão para o ruído de equilíbrio, que esta de acordo com o teorema da flutuação-dissipação, o qual relaciona a condutância com flutuações da corrente de equilíbrio.

1.4.4 O Ruído de Disparo (P_N)

A segunda consideração acontece com o sistema em $T = 0$. Quando isso ocorre, vemos que a função de distribuição de Fermi se torna a função degrau $f_\alpha = \theta(\mu_\alpha - E)$, dessa forma, ainda no regime de resposta linear, a equação 1.68 fica

$$P = \frac{2e^3}{h} |V| \text{Tr}(t^\dagger t r^\dagger r), \quad (1.73)$$

e mais uma vez usufruindo da unitariedade da matriz espalhamento

$$P = \frac{2e^3}{h} |V| \text{Tr}[t^\dagger t (1 - t^\dagger t)]. \quad (1.74)$$

Diagonalizando as matrizes argumento deste traço, obtemos o ruído adimensional em função dos autovalores de transmissão

$$p = P / \frac{2e^3}{h} = \sum_n \tau_n (1 - \tau_n). \quad (1.75)$$

Muitos textos, livros e artigos sobre dispositivos eletrônicos irão indicar a existência de diversos ruídos envolvidos no transporte de cargas, nesta dissertação teremos contato com três deles. Na próxima seção abordaremos o ruído de Poisson, mas na presente seção já mostramos os dois mais importantes, o primeiro foi o ruído de Nyquist-Jonhson, que está ligado ao movimento térmico dos elétrons e ocorre em qualquer condutor que tenha uma resistência R , mesmo sem corrente elétrica fluindo por ele e o segundo é o ruído de disparo, que neste trabalho terá papel de destaque. O ruído de disparo (*ou shot noise*) está ligado a quantização da carga, ou seja, a corrente não flui continuamente, em vez disso ela é uma soma de pulsos discretos no tempo, cada pulso corresponde a transferência de um elétron através do condutor e ao contrário do ruído térmico, o ruído de disparo não pode ser eliminado pela diminuição da temperatura [21].

1.5 O Fator Fano (F_N)

Na última expressão matemática da seção anterior, equação 1.75, pode-se perceber que o ruído de disparo não é determinado, simplesmente, pela condutância da amostra. Ele é determinado pela soma dos produtos das probabilidades de transmissão e reflexão dos canais abertos [18]. Apenas no limite $\tau_n \ll 1$, para todos os canais abertos, que ele assume o valor conhecido como ruído de Poisson ($P_{poisson}$), ou seja

$$P_{poisson} = \frac{2e^3}{h} |V| \sum_n \tau_n. \quad (1.76)$$

Mas, baseados na definição da condutância no regime de resposta linear e na equação 1.61 avançamos até

$$P_{poisson} = 2e|V| \left(\frac{e^2}{h} \sum_n \tau_n \right) = 2e|V|(G_N), \quad (1.77)$$

e portanto

$$P_{poisson} = 2e\langle I \rangle. \quad (1.78)$$

Este ruído obedece aos resultados esperados para uma distribuição de Poisson. Dentre elas, podemos destacar que as ocorrências da variável são independentes umas das outras e que a probabilidade de duas ou mais ocorrências simultâneas é praticamente zero. Diversos experimentos mostraram que correlações entre os elétrons reduzem o ruído de disparo abaixo do ruído de Poisson. Exemplos de correlação podem ser a repulsão coulombiana¹⁹ e o princípio de Pauli²⁰. Uma forma eficiente de considerar as correlações é tratar a condução elétrica como um problema de transmissão, essa é justamente a teoria de Landauer [22]. Na expressão do ruído de disparo dada pela equação 1.75, nos deparamos com o fator $(1 - \tau_n)$, que simplesmente representa a probabilidade de reflexão do elétron R_n , em outras palavras, $(1 - \tau_n)$ descreve a redução do ruído, no nosso caso, devido ao princípio de Pauli.

É neste contexto que chegamos numa relação importante, chamada de fator Fano F ou fator de Fano. Ele representa o quão correlacionada temporalmente é a transmissão dos elétrons pelo sistema, F é definido como o quociente entre o ruído real P e $P_{poisson}$, ou seja, no regime de resposta linear:

$$F = \frac{P_N}{P_{poisson}}. \quad (1.79)$$

Que pode, respeitando os limites de validade²¹, ser escrita com relação a condutância

¹⁹No geral, em metais está correlação é extremamente ineficaz.

²⁰O qual previne a ocupação dupla de um estado eletrônico, nos levando a estatística de fermi no equilíbrio térmico.

²¹Por exemplo, devido as restrições impostas pela distribuição de Poisson, o estado de ruído poissonico é válido para sistemas não-interagentes, pois interações causam desordens extremas no sistema, nos levando aos chamados ruídos super-poissonicos e estes não são objetos de estudo deste trabalho [22].

$$F = \frac{\sum_n \tau_n (1 - \tau_n)}{\sum_n \tau_n}. \quad (1.80)$$

Portanto o fator Fano, para transmissão independente da energia (*ou regime linear*), é dado por

$$F = \frac{p}{g}. \quad (1.81)$$

Analisando diretamente esta equação podemos inferir que F assumirá valores entre 0 e 1, dos quais podemos destacar os dois extremos abaixo

- Se $F = 0$, $P = 0$, temos a situação ideal onde não há correlação entre os elétrons, fisicamente indicando que todos os canais são transparentes e portanto os elétrons estão totalmente desimpedidos para atravessar a amostra;
- Se $F = 1$, $P = G$, aqui temos a situação inversa, baixa transparência devida a alta correlação e conseqüentemente levando os elétrons a enfrentarem gigantescas dificuldades para atravessar a amostra.

Para uma análise mais quantitativa, basta notarmos que em especial, se temos 1 canal aberto, $\sum_n 1 - \tau_n = 1 - T$ e assim

$$F = (1 - T). \quad (1.82)$$

Que nos leva, analisando T , aos mesmos resultados de antes, a figura 1.13 ilustra a situação. O fator Fano exibe valores notáveis, alguns previstos teoricamente a muito tempo por pesquisadores como Nagaev, Beenakker, Büttiker, Oleg e Yoseph [22]. Os diversos resultados experimentais mostraram que $F < 1$ ocorre quando temos alguns “super canais abertos”, conseqüentemente eles produzem menos ruído²², ou seja, nestes canais τ_n é próximo de 1 e portanto temos condução extrema. O valor de F esperado para fios desordenados (*sistema difusivo e composto apenas por um metal normal*) é de 1/3, se nesse sistema tivermos uma

²²Foi Oleg Dorokhov que notou pela primeira vez a existência destes super canais abertos por volta de 1984, mas as implicações físicas só foram entendidas a pouco tempo.

junção NS , um fator fano igual a 2 era esperado, pois como vimos na reflexão de Andreev, a corrente no supercondutor é carregada como pares de Cooper em unidades de $2e$, mas os resultados experimentais mostraram que $F = 2/3$ ²³.

Para um sistema balístico de uma cavidade cáotica ligada a guias ideais normais, o F esperado é $1/4$, ilustrado na figura 1.14. Mas se, como é o caso estudado neste trabalho, tivermos a presença de uma junção NS na cavidade, F assume novos valores que dependem de Q o número quântico topológico apresentado na seção 1.2.1, aprofundaremos estes dois últimos casos no capítulo 2 e 3. Importante dizer que todos estes valores esperados para F foram devidamente investigados e confirmados experimentalmente.

Na prática o fator Fano é um parâmetro importante na avaliação de materiais em geral. Vimos que quanto menor for um fator Fano de um material, melhor este material será, em termos de condução elétrica, como ilustrado na figura 1.13. Ele é independente (*quase*) da energia, o próprio Ugo Fano (1947) constatou (*Estudando o átomo de hidrogênio*) variação de 0,43 para 0,47 no fator Fano de elétrons com energias de 1keV para 100keV, respectivamente. Outros experimentos mostram que é esperado um fator Fano entre $1/3$ e $1/2$ para gases de partículas ionizadas com energia moderadas.

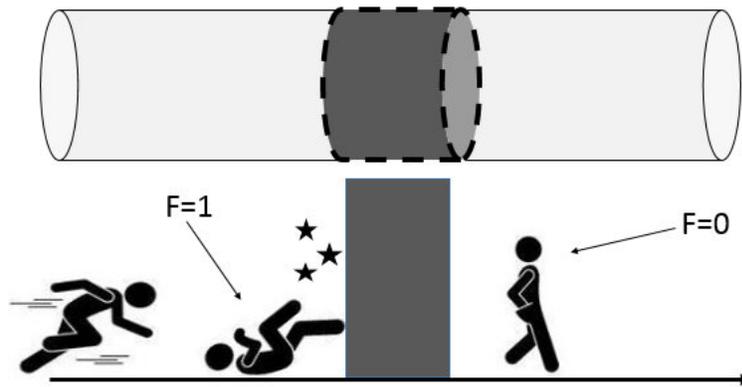


Figura 1.13: Representação do fator Fano em, por exemplo, um fio quântico, onde a região escura pode ser interpretada como uma barreira de potencial, em suma, quanto menor o fator Fano, maior a condução da amostra.

²³Em ambos os casos, F cai abaixo de 1 devido aos canais abertos de alta transparência (*chamados aqui de super canais abertos*), estes canais atualmente são considerados propriedades universais de sistemas desordenados [21, 23].

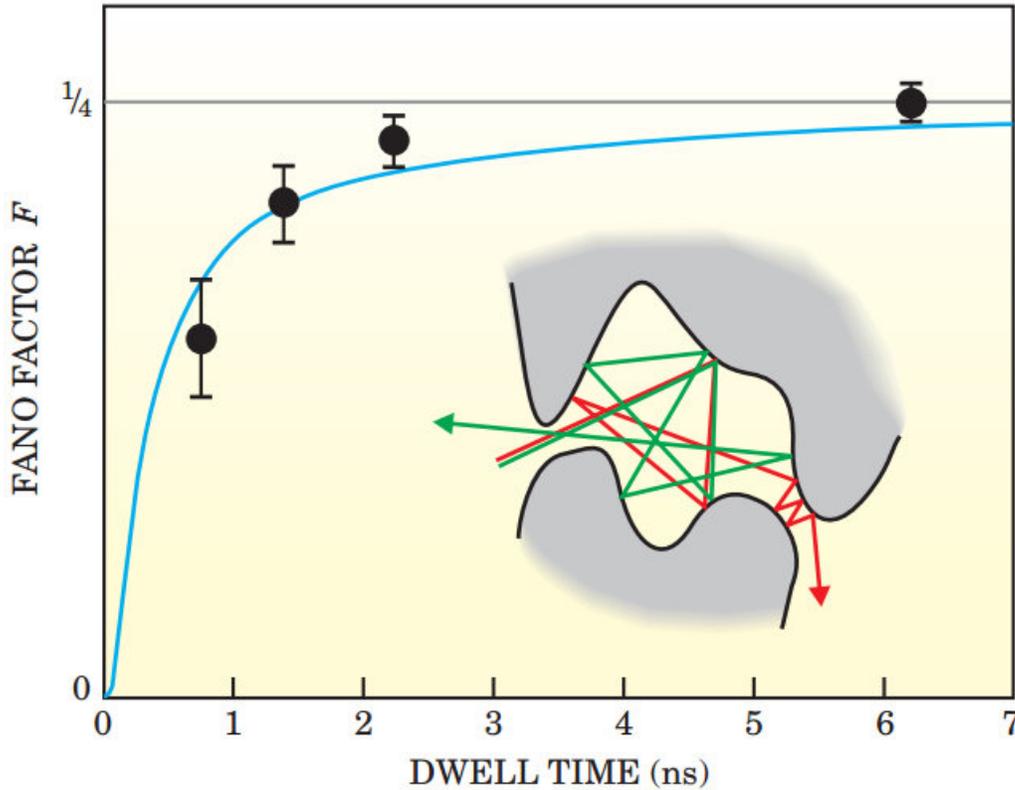


Figura 1.14: Dependência do fator Fano com o tempo de permanência dentro de um ponto quântico, a curva azul é a previsão teórica da passagem do espalhamento estocástico para o determinístico. A imagem da cavidade ilustra a sensibilidade das condições iniciais presentes na dinâmica caótica, figura retirada de [22].

1.6 Estruturas Híbridas: junção Metal Normal-Supercondutor (NS)

Chegou a hora de encontrar a condutância G_{NS} e o ruído de disparo P_{NS} para o caso de uma junção entre um metal normal-supercondutor (NS), foco principal deste trabalho. Mas antes disso precisamos de uma pequena revisão sobre a teoria de espalhamento neste tipo de sistema mesoscópico. O caminho a ser seguido é praticamente o mesmo do caso (N), desta forma continuaremos a seguir as ideias contidas em [18, 23]. Vamos iniciar analisando o sistema (NS) equivalente a figura 1.15.

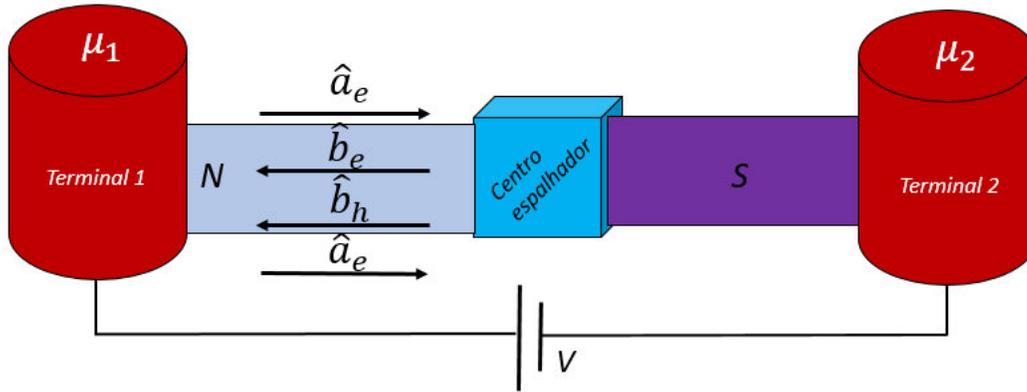


Figura 1.15: Esquema de um problema de espalhamento metal normal-supercondutor. Temos uma interface simples entre um metal normal (N) e um metal supercondutor (NS), intermediada pelo centro espalhador usual, onde a junção NS é fina e só há espalhamento na região especificada como centro espalhador, de resto, todas as outras características do arranjo são idênticas ao caso normal.

Os milhares de trabalhos sobre os supercondutores, como os descritos na seção 1.2, concluíram que a super-corrente é uma propriedade do estado fundamental do supercondutor, não apresentando nenhuma flutuação e portanto desprovida de qualquer ruído de disparo. Mas ao haver um contato ou junção com um condutor normal ocorre sim o aparecimento do ruído de disparo, trazendo com ele uma variedade de novos fenômenos. Pois bem, neste tipo de arranjo é a reflexão de Andreev, que responde pelo transporte de carga na junção NS . Como vimos um elétron que vem do lado normal em direção ao lado supercondutor, de energia (E) gerará um buraco que vem do lado supercondutor em direção ao lado normal, com mesma direção, sentido oposto e energia ($-E$), e assim por diante. Todas as características apresentadas para reflexão de Andreev são respeitadas, por exemplo, a carga perdida ($2e$) no lado N gera um par de Cooper no supercondutor e o inverso também ocorre [18].

Quando um buraco volta ao supercondutor ele recombina-se com o par de Cooper gerando um elétron. Este mecanismo se repete com igual probabilidade se estamos no equilíbrio, mas se uma ddp acima do gap supercondutor é aplicada, uma corrente finita flui pela junção NS deixando as coisas mais interessantes, veja a figura 1.16.

A teoria de espalhamento nos fornece uma maneira de implementar as simetrias de conservação de fluxo e simetria partícula-buraco no formalismo de transporte [24]. Felizmente, todo o processo da seção anterior pode ser repetido (*com algumas modificações*) neste caso. Vamos iniciar escrevendo a densidade de probabilidade e consequentemente o operador corrente

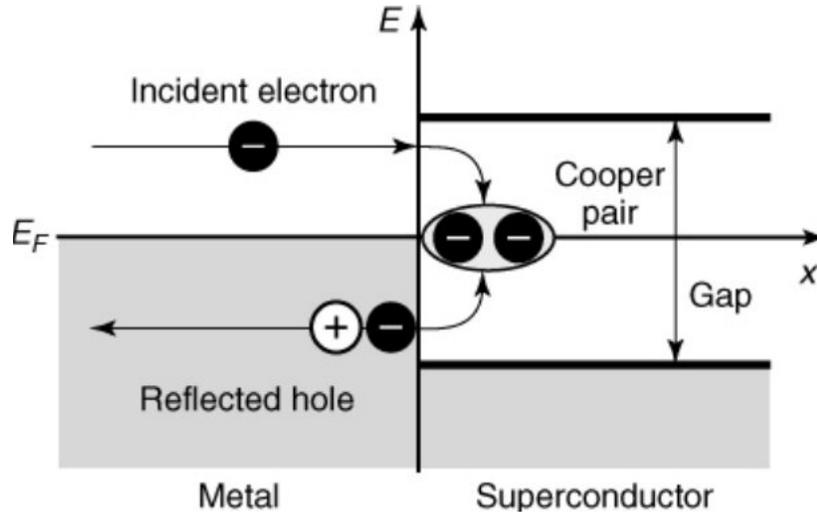


Figura 1.16: Existe coerência de fase entre partículas e buracos acoplados pela reflexão de Andreev na interface NS .

$$\hat{I}_l = \frac{\hbar e}{2im} \int dy_l \left[\hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t) \frac{\partial \hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t)}{\partial x_l} - \hat{\Psi}_l(\vec{r}_l, t) \frac{\partial \hat{\Psi}_l^\dagger(\vec{r}_l, t)}{\partial x_l} \right]. \quad (1.83)$$

Este praticamente não mudou, mas desta vez os operadores de criação e aniquilação sofrem uma leve modificação para incluírem a dinâmica de elétrons e buracos:

- $\hat{a}_{en}^\dagger(E)$, $\hat{a}_{hn}^\dagger(E)$ e $\hat{a}_{en}(E)$, $\hat{a}_{hn}(E)$: entrando na amostra, criam e aniquilam elétrons e buracos com energia total E ou $-E$ no canal n do guia l .
- $\hat{b}_{en}^\dagger(E)$, $\hat{b}_{hn}^\dagger(E)$ e $\hat{b}_{en}(E)$, $\hat{b}_{hn}(E)$: saindo da amostra, criam e aniquilam elétrons e buracos com energia total E ou $-E$ no canal n do guia l .

Por motivos de simplificação, assumiremos apenas um guia normal com um canal aberto, como sugerido pela figura 1.15. Os elétrons que entram (+) e saem (-) da amostra são descritos pela função de onda abaixo, da mesma forma que os buracos que entram (-) e saem (+)

$$\varphi^\pm(\vec{r}) = \chi(\vec{r}_\perp) \exp(\pm ik_F z). \quad (1.84)$$

Onde a coordenada z aponta para o supercondutor, $\exp(\pm ik_F z)$ corresponde a parte longitudinal e $\chi(\vec{r}_\perp)$ a sua parte transversal. Foi levado em consideração a dominância dos elétrons

no mar de Fermi para o transporte, negligenciando assim a dependência do vetor de onda com a energia. Assim como antes, todos estes operadores satisfazem as relações de anti-comutação usuais. Dada a minha constante ênfase na similaridade no desenvolvimento de (N) e (NS) , é possível perceber que em relação a teoria de espalhamento no metal-normal, agora teremos um índice a mais para poder diferenciar elétron e buraco, ou seja, os objetos de trabalho foram dobrados. Em termos destes operadores, a matriz que descreve a reflexão de quase-partículas, seja pela reflexão de Andreev ou pelas impurezas contidas na região desordenada [24], é dada pela matriz unitária r de dimensão $2N \times 2N$, que tem sua forma em blocos, semelhante a matriz espalhamento. A ideia central é que passamos então a dar ênfase na reflexão e não na transmissão dentro do supercondutor.

$$r = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix}. \quad (1.85)$$

Os operadores \hat{a} e \hat{b} estão relacionados pela matriz r da mesma forma que no caso (N) , salvo os novos índices envolvidos:

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_e \\ \hat{b}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_e \\ \hat{a}_h \end{pmatrix}. \quad (1.86)$$

A análise é também a mesma, por exemplo: r_{ee} é a sub-matriz $(N \times N)$ que representa a reflexão de elétrons incidentes, r_{he} representa a reflexão de buracos em resposta a elétrons incidentes e assim por diante. Voltando ao operador corrente, desta vez o operador de campo tem a seguinte forma

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \int dE e^{-iE\frac{t}{\hbar}} \frac{\chi(y, E)}{\sqrt{2\pi\hbar v(E)}} \left[\begin{pmatrix} \hat{a}_e \\ \hat{a}_h \end{pmatrix} e^{ik_F z} + \begin{pmatrix} \hat{b}_e \\ \hat{b}_h \end{pmatrix} e^{-ik_F z} \right], \quad (1.87)$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t) = \int dE' e^{iE'\frac{t}{\hbar}} \frac{\chi^*(y, E')}{\sqrt{2\pi\hbar v(E')}} \left[(\hat{a}_e^\dagger \hat{a}_h^\dagger) e^{-ik_F z} + (\hat{b}_e \hat{b}_h) e^{ik_F z} \right] \quad (1.88)$$

e $\chi(y, E)$ continua sendo sua parte transversal e os operadores de criação e aniquilação assumem a forma de vetores (*linhas e colunas*) para representar os casos de elétrons e buracos. Vale salientar que o espalhamento devido as impurezas não converte partículas em buracos e portanto as sub-matrizes r e r' são diagonais. Ainda precisamos da respectiva derivada

deste operador de campo, portanto

$$\frac{\partial \hat{\Psi}(\vec{r}, t)}{\partial z} = \int dE e^{-iE\frac{t}{\hbar}} \frac{\chi(y, E)}{\sqrt{2\pi\hbar v(E)}} ik_F \left[\begin{pmatrix} \hat{a}_e \\ \hat{a}_h \end{pmatrix} e^{ik_F z} - \begin{pmatrix} \hat{b}_e \\ \hat{b}_h \end{pmatrix} e^{-ik_F z} \right], \quad (1.89)$$

$$\frac{\partial \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t)}{\partial z} = \int dE' e^{iE'\frac{t}{\hbar}} \frac{\chi^*(y, E')}{\sqrt{2\pi\hbar v(E')}} ik_F \left[(-\hat{a}_e^\dagger \hat{a}_h^\dagger) e^{-ik_F z} + (\hat{b}_e^\dagger \hat{b}_h^\dagger) e^{ik_F z} \right]. \quad (1.90)$$

Pronto, acabamos de encontrar os quatro termos de dentro do colchete da equação 1.83. Realizando a substituição e as simplificações pertinentes, chegamos a

$$\left[\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t) \frac{\partial \hat{\Psi}(\vec{r}, t)}{\partial z} - \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \frac{\partial \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}, t)}{\partial z} \right] = \iint dE dE' e^{i(E-E')t/\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar\sqrt{v(E)v(E')}} 2ik_F [\mathcal{A} - \mathcal{B}]. \quad (1.91)$$

Onde \mathcal{A} e \mathcal{B} são matrizes introduzidas apenas para facilitar a abordagem, foram definidas como

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} (\hat{a}_e^\dagger \hat{a}_e + \hat{a}_h^\dagger \hat{a}_h) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.92)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} (\hat{b}_e^\dagger \hat{b}_e + \hat{b}_h^\dagger \hat{b}_h) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.93)$$

Assim, deixamos o operador corrente com a forma

$$\hat{I}_l(t) = \frac{e}{2\pi\hbar} \iint dE dE' e^{i(E-E')t/\hbar} [\mathcal{A} - \mathcal{B}]. \quad (1.94)$$

Essa expressão foi simplificada com a mesma idéia de Büttiker, utilizada antes, da semelhança das velocidades e energias dos elétrons e buracos no mar de Fermi, tomando o traço de $[\mathcal{A} - \mathcal{B}]$, com o cuidado de trocar os sinais dos termos onde aparecem os buracos (-E), encontramos o operador corrente generalizado para elétrons e buracos

$$\hat{I}_l(t) = \frac{e}{2\pi\hbar} \iint dE dE' e^{i(E-E')t/\hbar} Tr[\hat{a}_e^\dagger(E) \hat{a}_e(E') - \hat{a}_h^\dagger(E) \hat{a}_h(E') - \hat{b}_e^\dagger(E) \hat{b}_e(E') + \hat{b}_h^\dagger(E) \hat{b}_h(E')]. \quad (1.95)$$

Podemos condensar esta equação da seguinte forma

$$\hat{I}_l(t) = \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha\beta} \iint dE dE' e^{i(E-E')t/\hbar} Tr[\hat{a}_\alpha^\dagger(E) A_{\alpha\beta}(E, E') \hat{a}_\beta(E')]. \quad (1.96)$$

O que não é novidade, pois foi feito algo parecido na seção anterior, porém, desta vez os índices α e β indicam elétrons e buracos e a matriz auxiliar $A(E, E')$ é dada por

$$A(E, E') = \Lambda - r^\dagger(E)\Lambda r(E') \quad (1.97)$$

e também

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.98)$$

Mostrar que as duas expressões 1.95 e 1.96 para o operador corrente são equivalentes é trabalhoso, para facilitar este processo, vamos ignorar temporariamente todas as constantes na frente das duas expressões, focando apenas no traço da primeira e no somatório da segunda (*que também inclui um traço*)

$$\hat{I}_l(t) = Tr[\hat{a}_e^\dagger(E)\hat{a}_e(E') - \hat{a}_h^\dagger(E)\hat{a}_h(E') - \hat{b}_e^\dagger(E)\hat{b}_e(E') + \hat{b}_h^\dagger(E)\hat{b}_h(E')], \quad (1.99)$$

$$\hat{I}_l(t) = \sum_{\alpha\beta} Tr[\hat{a}_\alpha^\dagger(E) A_{\alpha\beta}(E, E') \hat{a}_\beta(E')]. \quad (1.100)$$

Vamos desenvolver os dois casos separados, iniciando com a primeira equação. Partindo das matrizes reflexões e suas relações entre os operadores \hat{a} e \hat{b} , já apresentadas antes, portanto para as matrizes, teremos

$$r(E) = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix}, \quad (1.101)$$

$$r^\dagger(E) = \begin{pmatrix} r_{ee}^\dagger & r_{he}^\dagger \\ r_{eh}^\dagger & r_{hh}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (1.102)$$

Onde na segunda, houve uma transposição apenas por conveniência, para as respectivas

relações com os operadores, chegamos a

$$\begin{aligned}\hat{b}_e &= r_{ee}\hat{a}_e + r_{eh}\hat{a}_h \\ \hat{b}_h &= r_{he}\hat{a}_e + r_{hh}\hat{a}_h,\end{aligned}\tag{1.103}$$

$$\begin{aligned}\hat{b}_e^\dagger &= r_{ee}^\dagger\hat{a}_e^\dagger + r_{he}^\dagger\hat{a}_h^\dagger \\ \hat{b}_h^\dagger &= r_{eh}^\dagger\hat{a}_e^\dagger + r_{hh}^\dagger\hat{a}_h^\dagger.\end{aligned}\tag{1.104}$$

Podemos substituir todas elas na equação 1.99, ou seja

$$\begin{aligned}\hat{I}_l(t) &= Tr[\hat{a}_e^\dagger(E)\hat{a}_e(E') - \hat{a}_h^\dagger(E)\hat{a}_h(E') - (\hat{a}_e^\dagger(E)r_{ee}^\dagger r_{ee}\hat{a}_e(E') + \hat{a}_e^\dagger(E)r_{ee}^\dagger r_{eh}\hat{a}_h(E') \\ &+ \hat{a}_e^\dagger(E)r_{eh}^\dagger r_{ee}\hat{a}_e(E') + \hat{a}_h^\dagger(E)r_{eh}^\dagger r_{eh}\hat{a}_h(E')) + \hat{a}_e^\dagger(E)r_{he}^\dagger r_{he}\hat{a}_e(E') + \hat{a}_e^\dagger(E)r_{he}^\dagger r_{hh}\hat{a}_h(E') \\ &+ \hat{a}_e^\dagger(E)r_{hh}^\dagger r_{he}\hat{a}_e(E') + \hat{a}_h^\dagger(E)r_{hh}^\dagger r_{hh}\hat{a}_h(E')].\end{aligned}\tag{1.105}$$

Vamos guardar este resultado por enquanto e agora focar na segunda relação, equação 1.100, em sua forma explicita teremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{ee}^\dagger & r_{he}^\dagger \\ r_{eh}^\dagger & r_{hh}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix}.\tag{1.106}$$

Ao final de todas as operações elementares, obtemos

$$A = \begin{pmatrix} (1 + r_{he}^\dagger r_{he} - r_{ee}^\dagger r_{ee}) & (r_{he}^\dagger r_{hh} - r_{ee}^\dagger r_{eh}) \\ (r_{hh}^\dagger r_{he} - r_{eh}^\dagger r_{ee}) & (-1 + r_{hh}^\dagger r_{hh} - r_{eh}^\dagger r_{eh}) \end{pmatrix}.\tag{1.107}$$

Onde cada uma dessas entradas corresponde a um elemento da matriz auxiliar A , podendo ser representado por

$$A = \begin{pmatrix} A_{ee} & A_{eh} \\ A_{he} & A_{hh} \end{pmatrix}\tag{1.108}$$

Agora vamos abrir o somatório existente na equação do operador corrente

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\beta} Tr[\hat{a}_\alpha^\dagger(E)A_{\alpha\beta}(E, E')\hat{a}_\beta(E')] &= Tr[\hat{a}_e^\dagger(E)A_{ee}(E, E')\hat{a}_e(E') + \hat{a}_h^\dagger(E)A_{he}(E, E')\hat{a}_e(E') \\ &+ \hat{a}_e^\dagger(E)A_{eh}(E, E')\hat{a}_h(E') + \hat{a}_h^\dagger(E)A_{hh}(E, E')\hat{a}_h(E')].\end{aligned}\tag{1.109}$$

Aqui (α) e (β) alternam entre (e) e (h). Utilizando o primeiro termo do argumento do traço da expressão acima como exemplo e usando o elemento da matriz A respectivo, temos

$$\hat{a}_e^\dagger(E)A_{ee}(E, E')\hat{a}_e(E') = \hat{a}_e^\dagger(E)(1 + r_{he}^\dagger r_{he} - r_{ee}^\dagger r_{ee})\hat{a}_e(E'). \quad (1.110)$$

Que por sua vez gera

$$\hat{a}_e^\dagger(E)(1 + r_{he}^\dagger r_{he} - r_{ee}^\dagger r_{ee})\hat{a}_e(E') = \hat{a}_e^\dagger(E)\hat{a}_e(E') - \hat{a}_e^\dagger(E)r_{ee}^\dagger r_{ee}\hat{a}_e(E') + \hat{a}_e^\dagger(E)r_{he}^\dagger r_{he}\hat{a}_e(E'). \quad (1.111)$$

Basta agora comparar este resultado (*parcial*) com aquele da equação 1.105, encontramos exatamente os mesmos três termos, os outros sete são encontrados repetindo o procedimento para os termos restantes do argumento do traço da equação 1.109. Objetivo concluído, as equações 1.95 e 1.96 são sim, equivalentes. Vamos relembrar nosso ponto de partida, estamos buscando os observáveis de transporte para junção (NS), ou seja, a condutância (G_{NS}) e o ruído de disparo (P_{NS}), que consequentemente nos levaram ao fator Fano (F_{NS}). Encontramos um dos ingredientes importantes, que é a submatriz de espalhamento r_{he} , pois ela que relaciona as amplitudes de reflexão de buracos com as amplitudes de elétrons emitidos no guia considerado, o próximo passo é relacionar r_{he} com (G_{NS}) e (P_{NS}). Faremos isso levando em conta a teoria de Landauer-Bütikker para sistemas (NS) [24], uma revisão detalhada pode ser encontrada na referência [25] e uma generalização para multi-terminais e com a presença de mais de um supercondutor no sistema pode ser encontrada na referência [26].

1.6.1 Condutância (G_{NS})

No regime de resposta linear, a condutância continua sendo: $G_{NS} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\langle I \rangle}{V}$, dessa vez a média de operadores será

$$\langle \hat{a}_\alpha^\dagger(E)\hat{a}_\beta(E') \rangle = \delta_{\alpha\beta}\delta(E - E')f_\alpha(E). \quad (1.112)$$

Podemos perceber que graças a consideração de apenas um canal aberto, esta média se tornou mais simples que no caso normal. Com o operador corrente dado pela equação 1.95, podemos escrever sua média da seguinte forma

$$\langle \hat{I}(t) \rangle = \frac{e}{2\pi\hbar} \sum_{\alpha} \int dE Tr[A_{\alpha\alpha} f_{\alpha}]. \quad (1.113)$$

Onde os deltas da equação 1.112 só vão permitir a persistência dos termos que satisfaçam $\beta = \alpha$ ou vice-versa, e f_{α} representa as duas funções de distribuição envolvidas nesse problema, que são dadas por

$$f_e(E) = \frac{1}{e^{(E-eV)/k_B T}}, \quad (1.114)$$

$$f_h(E) = \frac{1}{e^{(E+eV)/k_B T}}. \quad (1.115)$$

Abrindo o somatório em α da equação 1.113

$$\sum_{\alpha} Tr[A_{\alpha\alpha} f_{\alpha}] = Tr[A_{ee} f_e + A_{hh} f_h] \quad (1.116)$$

e como já conhecemos todos os termos da matriz auxiliar A , avançamos para

$$Tr[A_{ee} f_e + A_{hh} f_h] = (1 + r_{he}^{\dagger} r_{he} - r_{ee}^{\dagger} r_{ee}) f_e - (1 + r_{eh}^{\dagger} r_{eh} - r_{hh}^{\dagger} r_{hh}) f_h. \quad (1.117)$$

Para simplificar esta expressão evocamos duas características da matriz reflexão, uma consiste na sua unitariedade e a outra na presença da simetria partícula-buraco, que juntamente com a simetria de sub-rede serão detalhadas no capítulo 3. No caso da unitariedade, teremos

$$r_{he}^{\dagger} r_{he} + r_{ee}^{\dagger} r_{ee} = 1, \quad (1.118)$$

$$r_{hh}^{\dagger} r_{hh} + r_{eh}^{\dagger} r_{eh} = 1. \quad (1.119)$$

Fazendo uma pequena organização nos termos, veremos que

$$Tr[A_{ee} f_e + A_{hh} f_h] = 2Tr[r_{he}^{\dagger} r_{he}] (f_e - f_h). \quad (1.120)$$

Substituindo este resultado na média do operador corrente, equação 1.113, chegamos a

$$\langle \hat{I}(t) \rangle = \frac{e}{\pi\hbar} \int dE T r[r_{he}^\dagger r_{he}] (f_e - f_h). \quad (1.121)$$

A integral $\int dE (f_e - f_h)$ é eliminada da mesma forma que no caso (N), invocando este resultado novamente, avançamos para

$$\frac{\langle I \rangle}{|V|} = \frac{e}{\pi\hbar|V|} e|V| T r[r_{he}^\dagger r_{he}], \quad (1.122)$$

e finalmente, ainda no regime de resposta linear e a temperatura nula, a condutância da junção normal-supercondutora é dada pela matriz S relativa ao nível de Fermi ($E \rightarrow 0$), portanto em termos de r_{he} encontramos

$$G_{NS} = \frac{e^2}{\pi\hbar} T r[r_{he}^\dagger r_{he}]. \quad (1.123)$$

Onde se quisermos levar em conta a degenerescência de spin, um fator 2 multiplicativo deve ser considerado. Esta expressão é a análoga da fórmula de Landauer para a junção NS [24]. Vale salientar uma característica importante desta fórmula, apesar do nosso desenvolvimento ter levado em conta apenas um canal aberto, a equação 1.123 serve para qualquer número de canais abertos.

1.6.2 Ruído de Disparo (P_{NS})

No mesmo contexto, o ruído de disparo da junção (NS) no regime linear também pode ser encontrado. Novamente há semelhanças no desenvolvimento teórico entre (P_N) e (P_{NS}), principalmente nos primeiros passos, portanto não há necessidade de repeti-los integralmente, vamos resumi-los:

- Introduzimos novamente o operador pertinente a análise da flutuação da corrente, $\Delta \hat{I} = \hat{I} - \langle \hat{I} \rangle$;

- O ruído continua sendo caracterizado pela densidade espectral $P(w)$, equação 1.64, que decorre da transformada de Fourier da função de correlação corrente-corrente, equação 1.63;
- E por fim, reutilizamos o teorema de Wick, equação 1.65.

Com estes ingredientes e o novo operador corrente dado pela equação 1.96, a densidade espectral (*já com as devidas restrições de frequências arbitrárias*) assume a forma:

$$P(0) = \frac{2e^2}{h} \sum_{\alpha\beta} \int dE \text{Tr}[A_{\alpha\beta}(E, E)A_{\beta\alpha}(E, E)]f_{\alpha}(E)[1 - f_{\beta}(E)]. \quad (1.124)$$

Onde há duas diferenças básicas com relação a expressão equivalente, equação 1.67, para o caso (N), a primeira é o desaparecimento do somatório (*bem como os índices*) sobre os canais, isso decorre de haver apenas um canal aberto no guia normal, e a segunda, temos um traço, que simplesmente veio do operador corrente, equação 1.96. Para podermos continuar, abrimos o somatório da equação 1.124, só que dessa vez α e β discriminam entre elétrons (e) e buracos (h), portanto

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} \text{Tr}[A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}]f_{\alpha}[1 - f_{\beta}] &= \text{Tr}\{A_{ee}A_{ee}f_e[1 - f_e] + A_{he}A_{eh}f_h[1 - f_e] \\ &+ A_{eh}A_{he}f_e[1 - f_h] + A_{hh}A_{hh}f_h[1 - f_h]\}. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Por simplificação, todos os argumentos de energia (E, E) foram suprimidos. Para continuar, usamos a unitariedade da matriz reflexão, $r^{\dagger}r = \mathbf{1}$, resumindo

$$r_{ee}^{\dagger}r_{ee} + r_{he}^{\dagger}r_{he} = 1, \quad (1.126)$$

$$r_{hh}^{\dagger}r_{hh} + r_{eh}^{\dagger}r_{eh} = 1, \quad (1.127)$$

$$r_{ee}^{\dagger}r_{eh} + r_{he}^{\dagger}r_{hh} = 0, \quad (1.128)$$

$$r_{hh}^{\dagger}r_{he} + r_{eh}^{\dagger}r_{ee} = 0. \quad (1.129)$$

Com estas relações e os elementos da matriz auxiliar A , dados pela equação 1.107, podemos fazer o produto do lado direito da equação 1.125, vejamos

$$A_{ee}A_{ee}\mathcal{F}_{ee} = (1 + r_{he}^{\dagger}r_{he} - r_{ee}^{\dagger}r_{ee})(1 + r_{he}^{\dagger}r_{he} - r_{ee}^{\dagger}r_{ee}) = 4r_{he}^{\dagger}r_{he}r_{he}^{\dagger}r_{he}\mathcal{F}_{ee}, \quad (1.130)$$

$$A_{he}A_{eh}\mathcal{F}_{he} = (r_{hh}^\dagger r_{he} - r_{eh}^\dagger r_{ee})(r_{he}^\dagger r_{hh} - r_{ee}^\dagger r_{eh}) = 4r_{hh}^\dagger r_{he} r_{he}^\dagger r_{hh} \mathcal{F}_{he}, \quad (1.131)$$

$$A_{eh}A_{he}\mathcal{F}_{eh} = (r_{he}^\dagger r_{hh} - r_{ee}^\dagger r_{eh})(r_{hh}^\dagger r_{he} - r_{eh}^\dagger r_{ee}) = 4r_{hh}^\dagger r_{he} r_{he}^\dagger r_{hh} \mathcal{F}_{eh}, \quad (1.132)$$

$$A_{hh}A_{hh}\mathcal{F}_{hh} = (-1 + r_{hh}^\dagger r_{hh} - r_{eh}^\dagger r_{eh})(-1 + r_{hh}^\dagger r_{hh} - r_{eh}^\dagger r_{eh}) = 4r_{eh}^\dagger r_{eh} r_{eh}^\dagger r_{eh} \mathcal{F}_{hh}. \quad (1.133)$$

Nas quais \mathcal{F}_{ee} , \mathcal{F}_{he} , \mathcal{F}_{eh} e \mathcal{F}_{hh} representam $f_e[1-f_e]$, $f_h[1-f_e]$, $f_e[1-f_h]$ e $f_h[1-f_h]$, respectivamente. Substituindo todos estes resultados na equação 1.124, encontramos a densidade espectral generalizada para junção (NS)

$$P = \frac{8e^2}{h} \int dE \{Tr[r_{he}^\dagger r_{he} r_{he}^\dagger r_{he}](f_e[1-f_e] + f_h[1-f_h]) + Tr[r_{hh}^\dagger r_{he} r_{he}^\dagger r_{hh}](f_h[1-f_e] + f_e[1-f_h])\}. \quad (1.134)$$

Já vimos que a função distribuição de Fermi assume a forma da função degrau ($f = \Theta(\mu_\alpha - E_F)$) a temperatura zero, portanto a equação acima se torna

$$P = \frac{8e^2}{h} \int dE \{Tr[r_{he}^\dagger r_{he} r_{he}^\dagger r_{he}]\Theta(\mu_e - E_F)[1 - \Theta(\mu_e - E_F)] + \Theta(\mu_h - E_F)[1 - \Theta(\mu_h - E_F)] \\ + Tr[r_{hh}^\dagger r_{he} r_{he}^\dagger r_{hh}]\Theta(\mu_h - E_F)[1 - \Theta(\mu_e - E_F)] + \Theta(\mu_e - E_F)[1 - \Theta(\mu_h - E_F)]\}. \quad (1.135)$$

Como os traços independem da energia, podem ser retirados da integral. Os termos restantes vão gerar outras oito integrais (*todas em termos das funções degraus de elétrons e buracos*). Porém, devido as propriedades da própria função degrau, juntamente com os sinais contrários das energias dos elétrons e buracos e ainda, pelos limites dos respectivos potenciais eletroquímicos, apenas duas destas integrais sobrevivem, que juntas simplesmente são a diferença de potencial eletroquímico dos reservatórios (eV). Avançando, nos limites de temperatura e voltagem tendendo a zero [23], o ruído de disparo na junção (NS) pode ser escrito como

$$P = \frac{8e^3}{h} |V| Tr[r_{he}^\dagger r_{he} r_{hh}^\dagger r_{hh}]. \quad (1.136)$$

ou ainda, novamente utilizando a unitariedade de r e o fato que $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, finalmente encontramos o ruído de disparo normal-supercondutor dado por

$$P_{NS} = \frac{4e^3}{\pi\hbar} |V| \text{Tr}[r_{he}^\dagger r_{he} (1 - r_{he}^\dagger r_{he})]. \quad (1.137)$$

Que também compartilha da mesma característica importante de G_{NS} , ou seja, serve para qualquer número de canais abertos.

1.6.3 Fator Fano normal-supercondutor (F_{NS})

Vimos no final da seção 1.6 que o F_{NS} esperado para um sistema deste tipo (*fio difusivo, junção NS*) deveria ser $2/3$, com G_{NS} e P_{NS} determinados pode-se mostrar que isso é de fato verdade. Porém, não faremos esta demonstração aqui, pois ela foge do escopo deste trabalho. Ainda assim, podemos notar que se assumirmos a presença de campo magnético nulo (*com reversão temporal*) e levando em conta a conservação da carga, pode-se escrever tanto G_{NS} quanto P_{NS} em termos dos seus autovalores de reflexão (*diagonalizando $r_{he}^\dagger r_{he}$*), obtemos [24]

$$G_{NS} = \frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_n R_n, \quad (1.138)$$

$$P_{NS} = \frac{4e^3|V|}{\pi\hbar} \sum_n R_n(1 - R_n). \quad (1.139)$$

Dessa vez, vamos evoluir de forma mais geral, assumindo n canais abertos no guia, mas R_n pode ser expresso completamente em termos dos autovalores de transmissão da região normal, τ_n [23, 25], ou seja

$$R_n = \frac{\tau_n^2}{(2 - \tau_n)^2} \quad (1.140)$$

e conseqüentemente, os observáveis obtidos se tornam

$$G_{NS} = \frac{e^2}{\pi\hbar} \sum_n \frac{\tau_n^2}{(2 - \tau_n)^2}, \quad (1.141)$$

$$P_{NS} = \frac{16e^3|V|}{\pi\hbar} \sum_n \frac{\tau_n^2(1-\tau_n)}{(2-\tau_n)^4}. \quad (1.142)$$

Este é o principal resultado de [23], uma fórmula geral para um potencial desordenado qualquer na região N e claramente vemos que para $\tau_n = 0$ ou 1 não há contribuição do ruído de disparo, em total acordo com a equação 1.75, obtida no final da seção 1.4 para a região normal. Obtendo as médias de G_{NS} e P_{NS} o fator fano adimensional será dado por

$$F_{NS} = \frac{P_{NS}/P_0}{G_{NS}/G_0} = \frac{2}{3}. \quad (1.143)$$

Resultado que é o dobro do resultado para o caso normal, mas que ainda apresenta um ruído de disparo abaixo do ruído de Poisson [23], como esperado. O passo-a-passo detalhado para obtenção de $\langle G_{NS} \rangle$ e $\langle P_{NS} \rangle$ pode ser visto nas referências [18, 27]. Como uma aplicação das equações 1.141 e 1.142 ainda podemos perceber um resultado interessante, que ilumina outro caminho a ser traçado para o transporte mesoscópico. Vamos assumir uma barreira de tunelamento plana entre a região normal e a supercondutora, algo parecido com o ilustrado na figura 1.13. Todos os coeficientes de transmissão τ_n terão uma probabilidade de tunelamento idêntica (Γ) em todos os modos transversais N_y e portanto as equações 1.141 e 1.142 se transformam em

$$G_{NS} = \frac{e^2}{\pi\hbar} N_y \frac{\Gamma^2}{(2-\Gamma)^2}, \quad (1.144)$$

$$P_{NS} = \frac{16e^3|V|}{\pi\hbar} N_y \frac{\Gamma^2(1-\Gamma)}{(2-\Gamma)^4}, \quad (1.145)$$

e como vimos, o fator Fano é dado por

$$F_{NS} = \frac{P_{NS}}{P_{Poisson}} = \frac{P_{NS}}{2eG_{NS}V}. \quad (1.146)$$

O qual nos leva finalmente a [18]

$$F_{NS} = \frac{8(1-\Gamma)}{(2-\Gamma)^2}. \quad (1.147)$$

Podemos perceber que para $\Gamma \ll 1$ obtemos um curioso $F = 2$, este tipo de fator Fano

está ligado aos chamados ruídos super-poissonicos comentados na seção 1.5, eles também não serão estudados aqui. As informações que descrevemos a respeito do fator Fano dos principais dispositivos difusivos foram compiladas na figura 1.17.

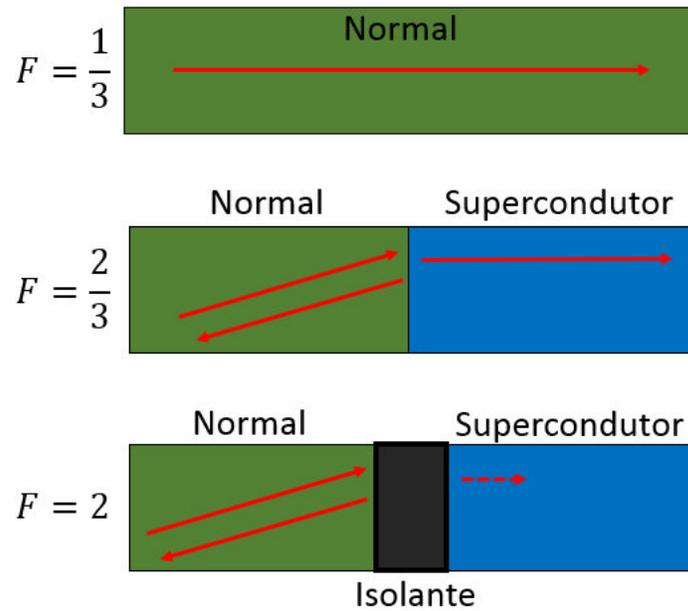


Figura 1.17: Representação dos três principais dispositivos difusivos (*fios desordenados*) e seus respectivos fatores Fano, indicando que o fator Fano define um dos três regimes do transporte, o regime difusivo, que é um dos mais importantes para a física mesoscópica. De cima para baixo temos: os guias compostos por metais normais, depois temos a presença da junção metal normal-supercondutora e por fim também uma junção (*NS*), mas separadas por um isolante.

1.7 Teoria de Matrizes Aleatórias (*TMA*)

As matrizes aleatórias apareceram primeiramente num trabalho de Wishart [28] por volta de 1928. Mas foi Wigner, a cerca de 1955, que lhe trouxe visibilidade quando estudou o espalhamento de ressonâncias de partículas com núcleos pesados em reações nucleares lentas. Quase 10 anos depois, Dyson formalizou matematicamente tal teoria [29]. Desde sua introdução por Wigner na física nuclear, até a atualidade, as matrizes aleatórias ganharam um amplo cenário de aplicações. Temos como exemplos aplicações existentes em funções L e a hipótese de Riemann, permutações aleatórias, teoria das cordas, sistemas quânticos caóticos, ótica, finanças, teoria da informação, movimento Browniano, gravidade quântica, e muito outros [29].

Nas diversas áreas de aplicação citadas, é nos sistemas quânticos caóticos que estamos interessados, uma vez que os elétrons estejam confinados nestes tipos de sistemas, seus estados são imprevisíveis e não se tem mais controle sobre eles. Sendo assim, o comportamento desses estados passa a ser aleatório.

Em geral, a ideia fundamental é a seguinte: quando analisamos processos quânticos em sistemas fechados, com muitos níveis de energia, queremos conhecer e escrever o seu Hamiltoniano, que por sua vez carrega toda informação a respeito dos graus de liberdade microscópicos. Porém, é sabido que esta abordagem é extremamente complicada e por isso ineficiente. De modo alternativo, pode-se estudar o problema através de matrizes de espalhamento aleatórias. De fato é melhor representar este Hamiltoniano (*de dimensões largas*) como uma matriz aleatória e hermitiana [16].

Para uma descrição detalhada da *TMA* e suas aplicações, por favor veja a referência [30]. Em resumo, substitui-se o Hamiltoniano do sistema quântico estudado por uma matriz aleatória, que esteja de acordo com as simetrias fundamentais deste sistema. A partir desta encontra-se as funções de correlações entre seus autovalores e autovetores, que por sua vez permitem encontrar muitas propriedades físicas do sistema [13]. No nosso caso, os alvos são a condutância e o ruído de disparo, para assim obter o fator Fano.

A *TMA* está ligada a universalidade²⁴ do transporte [31] e foi Dyson [32] o responsável pela classificação dos ensembles de acordo com a dependencia deles com as citadas simetrias fundamentais.

As simetrias são os ingredientes básicos dos ensembles envolvidos nesta teoria, segue de

²⁴Universal no sentido que independem do tamanho da amostra ou do grau de desordem do sistema.

forma abreviada suas características gerais:

- **Simetria de Reversão Temporal (*SRT*)**

A simetria de reversão temporal foi esclarecida na seção 1.3, vamos recordar que podemos entendê-la mais como uma reversão do movimento, ou seja, a partícula percorre a mesma trajetória, porém com sentido contrário. Vimos também que esta característica resulta na matriz espalhamento ser simétrica.

- **Simetria de Rotação de Spin (*SRS*)**

Esta simetria está ligada ao grau de liberdade do spin dos elétrons no sistema [30], se temos forte interação spin-órbita, então teremos quebra da *SRS*;

- **Simetria de Subrede (*SLS*)**

Esta é a simetria fundamental que caracteriza a classe Quiral, veremos mais detalhes no capítulo 3, mas podemos adiantar que ela está ligada ao arranjo da estrutura do sistema, como ilustrado na figura 1.18;

- **Simetria Partícula-Buraco (*PHS*)**

Esta simetria está ligada ao mecanismo de reflexão na interface híbrida normal-supercondutora, também veremos mais detalhes a seu respeito capítulo 3. Importante notar que ela é governada pela reflexão de Andreev, abordada na seção 1.2.2, portanto uma simetria relevante quando o sistema possui partes supercondutoras;

Todas as classes são caracterizadas com respeito a presença (*ou quebra*) de uma ou mais das simetrias descritas acima. Primeiramente Wigner e Dyson introduziram três classes de ensembles [32, 35]. Logo depois apareceram mais três classes de ensembles, por Shuryak [36] e Verbaarschot [37], possibilitando assim uma expansão da *TMA*, principalmente para sistemas quirais (*que serão discutidos oportunamente, pois esta classe que caracteriza o sistema estudado aqui*) e posteriormente apareceram mais quatro classes de ensembles, graças a Altland e Zimbauer [38], essas aplicadas a sistemas em contato com supercondutores.

Todas estas classes são representadas na tabela (1.1), na qual está relacionada a classe de simetria com os seu respectivo ensemble, cada ensemble é representado por um índice de simetria β e também é mostrado algumas características físicas notáveis do sistema, são elas:

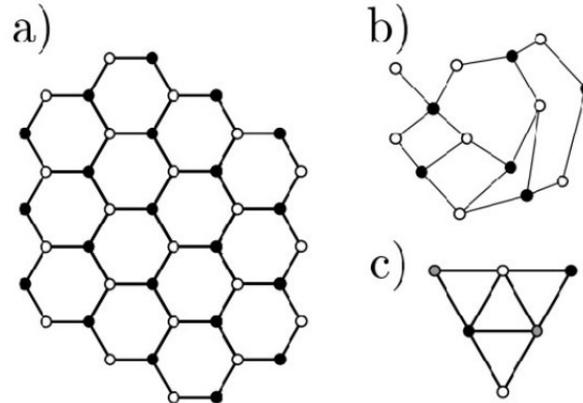


Figura 1.18: Exemplos de sistemas com (*e sem*) simetria de subrede, os pontos pretos, brancos e cinzas representam as subredes A, B e C. Em (a) temos a estrutura do importante Grafeno, do tipo coméia, (b) representa uma estrutura com *SLS*, mas irregular e por fim em (c) temos uma estrutura sem *SLS* [33]. Figura retirada de [34].

- $\mathbf{B} = 0$ indica que o sistema não apresenta campo magnético;
- $\mathbf{SO} = 0$ indica que o sistema não apresenta uma forte interação spin-órbita.

De certo, apenas olhando para tabela (1.1) já podemos inferir alguma informação importante de um determinado sistema, como por exemplo, ensembles da classe de Altland-Zimbauer são adequados para descrever sistemas híbridos supercondutores, enquanto que todos os ensembles da classe quirial apresentam *SLS*, que é uma característica intrínseca de sistemas com quiralidade, e assim por diante.

Enfatizando, para física mesoscópica temos até o momento uma descrição completa da estatística das matrizes transmissão das duas geometrias caóticas explicitadas nesta dissertação, a primeira envolve os fios desordenados e a segunda trata dos bilhares quânticos, estes últimos, por sua vez tem o transporte analisado tanto no ensemble de matrizes de espalhamento como no ensemble de matrizes hamiltonianas, nesta dissertação escolhemos a abordagem no ensemble de matrizes de espalhamento, de qualquer forma, uma descrição detalhada de toda *TMA* aplicada a física mesoscópica pode ser vista na referência [31].

Classe de Simetria	Ensemble	β	SRT	PHS	SLS	Fisicamente
Wigner Dyson	A (Unitário)	2	0	0	0	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SO} = \textit{irrelevante}$
	AI (Ortogonal)	1	+1	0	0	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} = 0$
	AII (Simplético)	4	-1	0	0	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} \neq 0$
Quiral	AIII (Unitário)	2	0	0	1	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SO} = \textit{irrelevante}$
	BDI (Ortogonal)	1	+1	+1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} = 0$
	CII (Simplético)	4	-1	-1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} \neq 0$
Altland-Zimbauer	D	2	0	+1	0	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SO} \neq 0$
	C	2	0	-1	0	$\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{SO} = 0$
	DIII	1	-1	+1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} \neq 0$
	CI	4	+1	-1	1	$\mathbf{B} = 0, \mathbf{SO} = 0$

Tabela 1.1: Tabela de Cartan para os espaços simétricos [39], ela mostra a relação entre as classes de simetria e o tipo de simetria que o sistema poderá apresentar, onde os valores ± 1 indicam preservação da simetria e 0 indica quebra de simetria, tabela adaptada de [15].

1.7.1 Os Bilhares Caóticos Quânticos

Vimos que as propriedades estatísticas do espalhamento nos sistemas mesoscópicos possuem duas geometrias interessantes, os fios desordenados (*resumidos na figura 1.17*) e os pontos quânticos. Estes pontos são também conhecidos como bilhares ou cavidades, e nosso sistema (*junção NS*) está inserido nesta última categoria. Podemos dizer que os bilhares, como os na figura 1.19, são modelos que descrevem a dinâmica (*caótica ou regular*) das partículas que neles adentram e por sua vez sofrem reflexões elásticas com as paredes. O sistema estudado neste trabalho pode ser representado exatamente como um bilhar caótico, consistindo em uma cavidade 2D conectada a dois guias ideais, um metal normal e outro supercondutor, como na figura 1.20. Estes bilhares vêm sendo estudados a muito tempo e hoje é possível construir cavidades da ordem de centenas de nanômetros, bem como cavidades que permitem um comportamento balístico dos elétrons no seu interior, como mostra a figura 1.21.

Uma vez dentro da cavidade o elétron deve permanecer lá por um tempo maior que

os tempos de Ehrenfest²⁵ e Ergódico²⁶, quando isso acontece, os observáveis de transporte independem das propriedades microscópicas da cavidade caótica quântica (*alcançamos a universalidade do transporte*), isto justifica a utilização da *TMA*, todas estas condições são pressupostas para os casos estudados nesta dissertação.

Resumindo, o fato de os elétrons serem espalhados de diversas formas diferentes favo-

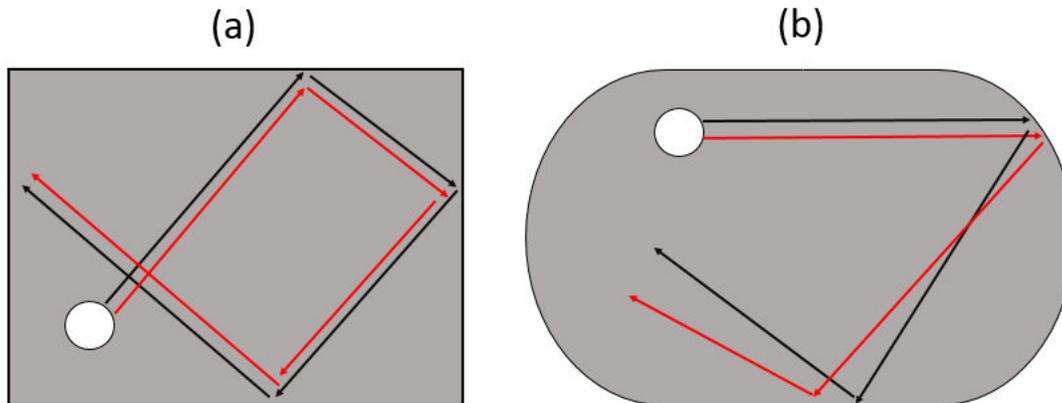


Figura 1.19: Na situação (a) temos uma representação de um bilhar regular, as trajetórias da bola vão se repetir depois de algumas colisões, enquanto que em (b), a presença das bordas arredondadas não mais garante o paralelismo das trajetórias, gerando um movimento irregular, ou seja, caótico. Figuras adaptadas de [40].

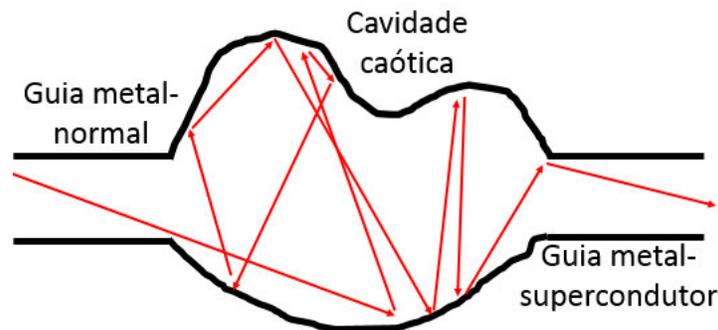


Figura 1.20: Representação simplificada de uma cavidade quântica conectada a dois guias ideais, as setas indicam uma possível trajetória do elétron.

rece a desordem de sua dinâmica. Nestes casos podemos fazer uso da *TMA* para obter grande parte da informação de um sistema quântico aberto (*ou fechado*) conectado a guias de onda através de experimentos de espalhamento. Como enfatizado anteriormente, no cenário da física mesoscópica, comumente temos duas abordagens, na primeira construímos a matriz \mathbf{S}

²⁵Está ligado com o tempo que a função de onda do elétron, que entrou na cavidade, leva para alcançar um tamanho da ordem do tamanho da cavidade [1].

²⁶Tempo para o elétron explorar todo o espaço de fase.

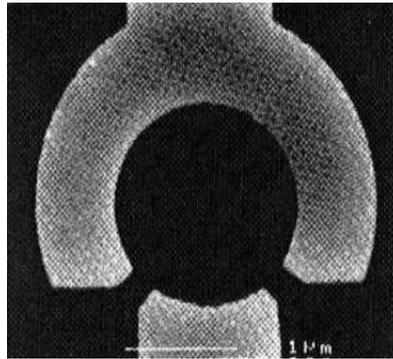


Figura 1.21: Fotografia real de uma cavidade quântica num gás bidimensional, a linha branca representa 1 micromêtro, figura retirada de [51].

do bilhar quântico em termos do hamiltoniano do sistema, enquanto que a segunda consiste em construir a matriz \mathbf{S} diretamente, sem nenhuma referência ao hamiltoniano, este foi o caminho escolhido para os resultados deste trabalho, como veremos nos próximos capítulos.

1.8 Nesta dissertação

Vimos neste capítulo os principais conceitos de física mesoscópica afim de iluminar o caminho na busca dos principais observáveis de transporte. O resumo abrangeu peculiaridades ligadas a teoria de matrizes aleatórias (*TMA*), teoria de espalhamento metal normal e metal normal-supercondutor, onde a reflexão de Andreev controla o transporte na junção *NS*, além disso, foi feita uma breve explanação a respeito dos supercondutores topológicos e pontos quânticos balísticos [53, 54, 55].

1.8.1 Capítulo 2

No contexto da *TMA*, vamos utilizar a descrição da matriz espalhamento e apresentaremos o método diagramático (*MD*), técnica criada por Brouwer e Beenakker com o objetivo de obter médias de funções polinomiais sobre o grupo unitário. A partir desta técnica reobtivemos alguns resultados importantes do transporte eletrônico em cavidades cáoticas para todos os ensembles da classe de Wigner-Dyson, como a média e variância da condutância juntamente com o ruído de disparo, permitindo ainda, encontrarmos o fator Fano para estes

dispositivos, cujos valores caracterizam o regime balístico de cavidades cáoticas normais [41, 56].

1.8.2 Capítulo 3

Neste capítulo vamos de certa forma repetir os passos do capítulo 2, mas estendendo o método diagramático para incluir dois ensembles circulares da classe de Quiral, *BDI* e *CII*, ambos na presença de um supercondutor topológico. O material topológico é caracterizado pelo número topológico Q e portanto encontramos os observáveis justamente em função deste parâmetro, inclusive resultados inéditos do ruído de disparo e o fator Fano para estes casos [10, 57].

1.8.3 Capítulo 4

No capítulo 4, apresentaremos nossas conclusões a respeito do que foi feito e perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Cálculos da Média da Condutância e do Ruído de Disparo em Cavidades Cáoticas

*“Uma longa viagem começa com um único passo”
-Provérbio chinês*

2.1 Cavidades Cáoticas e a classe Wigner-Dyson

Nesta seção usaremos a técnica diagramática para obter a média da condutância, o ruído de disparo e o fator Fano referentes ao transporte de cargas através da cavidade caótica conectada a guias normais, assim com o sistema descrito na seção 1.4 e ilustrado na figura 2.1. No contexto da *TMA* podemos notar pela tabela (1.1) do capítulo anterior, algumas características dos sistemas físicos representados pelos três ensembles da classe Wigner-Dyson (*WD*):

- A matriz espalhamento deste sistema é descrita pelo ensemble circular ortogonal, *ECO*, $\beta = 1$, temos a preservação da *SRT* e *SRS*, ou seja, campo magnético externo nulo. Neste caso a matriz S satisfaz a relação $S = S^T$, além da unitariedade;
- A matriz espalhamento deste sistema é descrita pelo ensemble circular unitário, *ECU*,

$\beta = 2$, temos quebra da *SRT* devido ao campo magnético externo ser diferente de zero. A matriz S é somente unitária;

- A matriz espalhamento deste sistema é descrita pelo ensemble circular simplético, *ECS*, $\beta = 4$, temos preservação apenas da *SRT* devido ao campo magnético externo nulo e com a presença de uma forte interação spin-orbita temos a quebra da *SRS*;

Vimos que o transporte de cargas através de cavidades caóticas (*ou bilhar quântico*) é descrito pela *TMA* baseada na matriz de espalhamento. Neste caso vamos supor que ela é distribuída uniformemente sobre o grupo unitário, ou seja, toda matriz \mathbf{S} é igualmente provável, o próprio ensemble circular unitário pertence a este grupo. Para avançar na busca pelos observáveis do transporte precisamos saber como efetuar médias sobre este grupo unitário, isto será feito com o método diagramático (*MD*), como mostraremos a seguir.

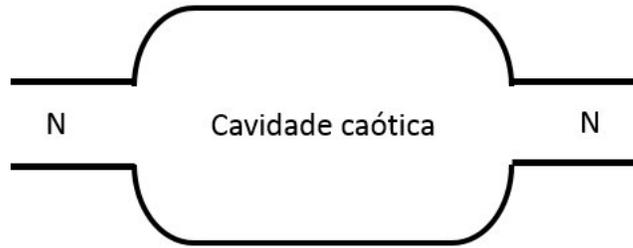


Figura 2.1: Cavidade caótica ligada a dois guias normais.

2.1.1 Integrando sobre o Grupo Unitário e (*MD*)

No contexto da *TMA* resumido no final do capítulo anterior, chegamos a técnica diagramática. Esta técnica proposta por Brouwer e Beenakker consiste na integração, ou melhor, no cálculo da média de funções do tipo [41]

$$\langle f \rangle = \int dU f(U). \quad (2.1)$$

Onde $f(U)$ é uma função polinomial composta pelos elementos da matriz unitária, U tem dimensão $N \times N$ e dU é a medida de Haar para o grupo unitário [42]. Esta medida invariante garante que $U = WU'V$, onde W e V são matrizes unitárias arbitrárias e U' é a matriz de autovalores de U . O produto $WU'V$ deve satisfazer as restrições impostas a

U , de modo que, a matriz de autovetores W , que diagonaliza a matriz U' , é uniformemente distribuída no grupo ortogonal, unitário ou simplético para $\beta = 1, 2$ ou 4 , respectivamente [3, 31], dando origem aos ensembles de matrizes circulares enunciados no começo deste capítulo, assim chamados, porque a densidade de autovalores é constante no círculo unitário no plano complexo [43].

Mas há um problema, basta um pequeno aumento nas dimensões das matrizes envolvidas para que a obtenção da média diretamente por meio da equação 2.1 se torne extremamente complicada, como pode ser visto em [41]. Felizmente as funções polinomiais podem ser diagramatizadas, ou seja, podem ser representadas por diagramas que facilitam sua resolução.

Vamos apresentar como é feita a construção destes diagramas de forma objetiva, os

$$\begin{aligned}
 U_{a,b} &= \bullet \text{---} \circ \\
 U_{\alpha,\beta}^* &= \bullet \text{---}^* \circ \\
 A_{i,j} &= \text{---} \blacktriangleright \\
 \delta_{a,b} &= \text{---}
 \end{aligned}$$

Figura 2.2: De cima para baixo temos representados os elementos das matrizes unitárias U e U^* , assim como os elementos de uma matriz fixa A e o delta de Kronecker [44]

detalhes técnicos/matemáticos profundos podem ser encontrados no material original de Brouwer e Beenakker, referência [41]. Dito isso, primeiramente olhamos para os ingredientes fundamentais mostrados na figura 2.2, os diagramas são montados levando em conta que os elementos da matriz $U_{a,b}$ se tornam linhas pontilhadas ligando duas bolinhas, estas bolinhas representam os índices, preta para a (ou α) e branca para b (ou β), as duas possibilidades de ligação, isto é, pretas/pretas ou brancas/brancas e pretas/brancas ou brancas/pretas vão depender do ensemble e da classe de simetria que estamos interessados como veremos adiante. Os elementos da matriz $U_{\alpha,\beta}^*$ serão representados do mesmo jeito, exceto o asterístico em cima da linha pontilhada. O elemento A_{ij} pertence uma a matriz não aleatória A e é representada por uma linha grossa com a seta no sentido de i para j e por fim o delta de Kronecker, que vai aparecer nas médias, representado por uma linha fina, que indica todas as permutações dos índices anteriores.

Faremos alguns exemplos afim de esclarecer estas ideias, mas vamos supor o Ensemble

Circular Unitário ($ECU, \beta = 2$). O diagrama é feito ligando uma bolinha preta a outra preta (*e mesmo para as brancas*) por meio de uma linha grossa. As diversas permutações são feitas ligando as bolinhas pretas com pretas e brancas com brancas por meio de uma linha fina, que vai de U para U^* ou vice-versa, como mostra a figura 2.2.

Com o diagrama montado, observa-se uma estrutura cíclica, um tipo de circuito fechado onde pode-se partir de uma bolinha qualquer e retornar por meio de dois caminhos diferentes. Esta alternância entre as linhas grossas, finas e pontilhadas trazem informações importantes para extração das equações decorrentes dos diagramas.

Partindo de uma bolinha por cima de uma linha grossa, devemos “andar” pelo diagrama alternando entre as linhas grossas e finas, ao retornar a bolinha inicial, teremos fechado o chamado ciclo- T , que corresponde ao traço das matrizes fixas envolvidas, mais detalhes serão mostrados mais a frente, nos exemplos 1 e 2.

Partindo de uma bolinha por cima de uma linha pontilhada, de novo “andando” pelo diagrama, mas desta vez alternando entre as linhas pontilhadas e finas, por fim retornando a bolinha inicial, teremos fechado o chamado ciclo- U , que corresponde ao peso daquele diagrama. Um detalhe importante é que ao retornar a bolinha inicial num ciclo- U , devemos sempre dividir por 2 o número de linhas pontilhadas que passamos até completar o ciclo, este valor nos indica qual peso estamos lidando naquele diagrama. Os pesos são indicados por V_k , onde k indica justamente o quociente das linhas pontilhadas dividido por 2. Como exemplo, digamos que em quatro diagramas distintos tivermos passado por 2, 4, 6 ou 8 linhas pontilhadas ao finalizar os ciclos- U , então esses diagramas possuem respectivamente pesos V_1, V_2, V_3 e V_4 , pois $\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}$ e $\frac{8}{2}$. Também encontraremos diagramas com presença mista de ciclos- U no mesmo diagrama, por exemplo podemos ter um diagrama com 4 ciclos- U de 2 linhas pontilhadas, portanto $V_{1,1,1,1}$, e num outro diagrama presença de 1 ciclo- U de duas linhas pontilhadas num lado e 1 ciclo- U de 6 linhas pontilhadas no outro lado do mesmo diagrama, temos então agora um diagrama de peso $V_{1,3}$ ou $V_{3,1}$ ¹, todos os detalhes sobre a origem e obtenção destes pesos estão contidas em [41].

Exemplo 1: f_1 e f_2 , classe WD e ECU ($\beta = 2$)

Na tentativa de sintetizar os procedimentos mais importantes da técnica diagramática, vamos utilizar um exemplo simples. Considere que ainda estamos no ECU da classe WD , $\beta = 2$ e também considere as funções abaixo

¹Felizmente a ordem não importa, ela só depende de qual parte do diagrama foi tomada primeiro, isto é, de qual bolinha foi escolhida como ponto de partida para análise do ciclo- U

$$f_1(U) = Tr AUBU^\dagger. \tag{2.2}$$

$$f_2(U) = Tr AUBU^\dagger CUDU^\dagger. \tag{2.3}$$

Onde A, B, U e U^\dagger assumem as regras já apresentadas, como na figura 2.2. Dessa forma podemos representar diagramaticamente f_1 e f_2 , bem como suas respectivas médias, observe as figuras 2.3, 2.4 e 2.5.

Pelo menos neste momento, será descrito o passo-a-passo para obtenção das carac-

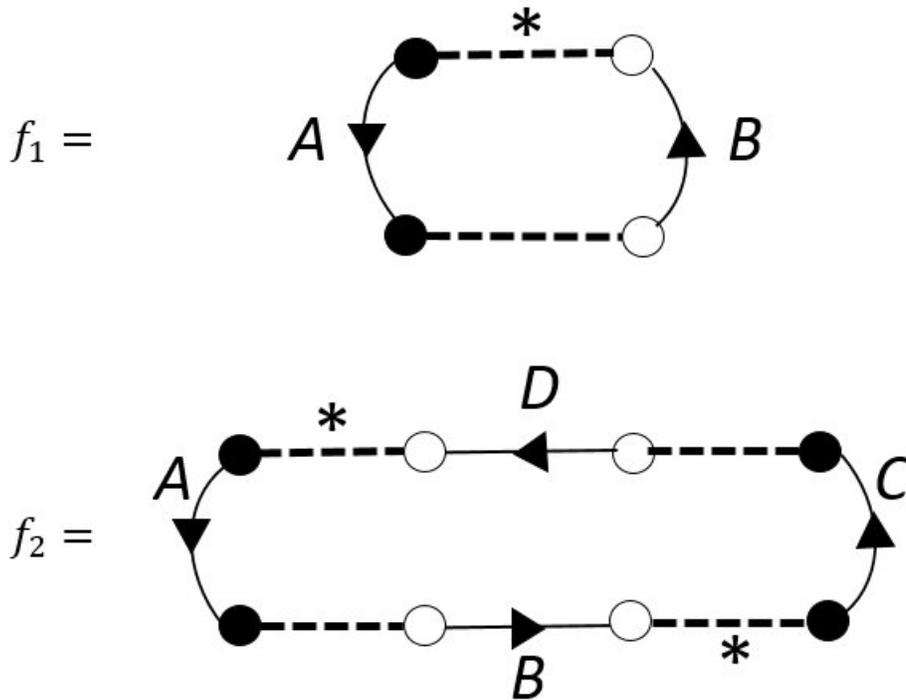


Figura 2.3: Representação diagramática de f_1 e f_2 , ambas para o ECU.

terísticas extraídas dos diagramas para que fique clara a aplicação das regras formais anteriores. Pois bem, na figura 2.4, observamos a presença de dois ciclos- T independentes, pois escolhendo uma bolinha qualquer para ponto de partida, passamos por uma linha grossa e uma linha fina (*em vermelho*) antes de retornar a bolinha inicial e isso acontece duas vezes separadas. Também observamos um ciclo- U , pois passamos por duas linhas pontilhadas e duas linhas finas antes de retornar ao ponto inicial, deste modo temos um peso V_1 , montamos assim a equação para a média de f_1 como

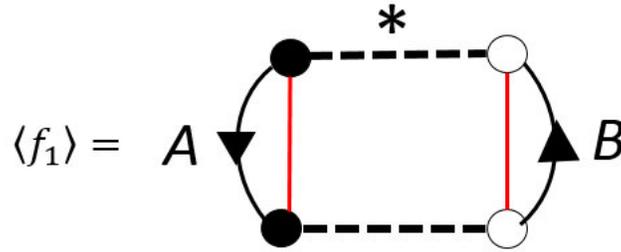


Figura 2.4: Desta vez temos a representação diagramática da média de f_1 para o ECU .

$$\langle f_1 \rangle_{ECU} = V_1 TrA.TrB. \tag{2.4}$$

No mesmo contexto, na figura 2.5 devemos analisar cada um dos quatro diagramas da mesma forma. Vejamos o primeiro deles, ele possui três ciclos- T , resultando em $TrA.TrC.TrBD$ e dois ciclos- U (cada um passando por duas linhas pontilhadas, assim teremos $V_{1,1}$). No segundo vemos quatro ciclos- T e um ciclo- U (desta vez passamos por todas as quatro linhas pontilhadas, assim teremos V_2). Para o terceiro teremos dois ciclos- T e um ciclo- U , então peso V_2 , e finalmente no quarto vemos três ciclos- T e dois ciclos- U (cada um passando por duas linhas pontilhadas, portanto novamente $V_{1,1}$). Com a fusão de todas estas informações, encontraremos a expressão da média de f_2 dada por

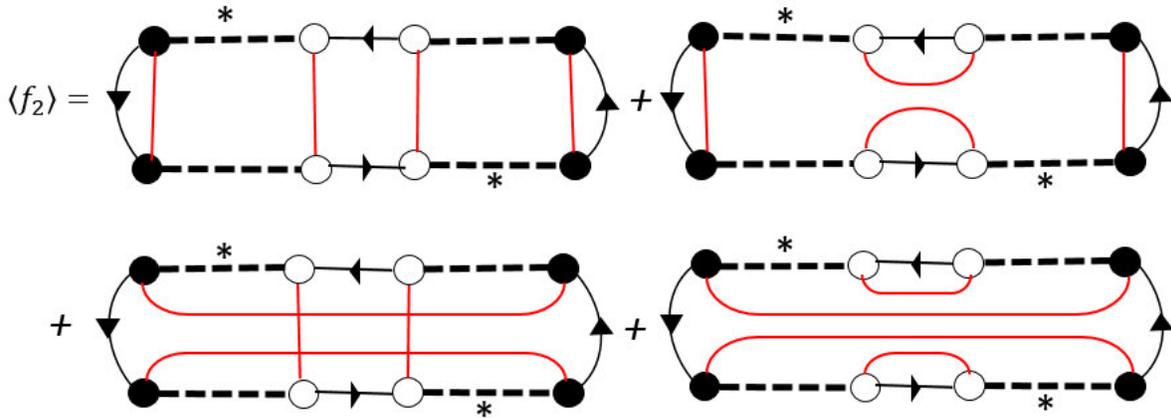


Figura 2.5: Representação diagramática da média de f_2 , também para o ECU .

$$\langle f_2 \rangle_{ECU} = V_{1,1}[TrA.TrC.TrBD+TrAC.TrB.TrD]+V_2[TrA.TrB.TrC.TrD+TrAC.TrBD]. \tag{2.5}$$

Os três pesos que apareceram V_1 , $V_{1,1}$ e V_2 , são dados, no ECU , por:

$$V_1 = \frac{1}{N}, \quad (2.6)$$

$$V_{1,1} = \frac{N}{N(N^2 - 1)}, \quad (2.7)$$

$$V_2 = -\frac{1}{N(N^2 - 1)}. \quad (2.8)$$

As equações 2.4 e 2.5 são as médias das funções f_1 e f_2 para o ECU . Usando este procedimento podemos tirar a média de qualquer função do tipo da equação 2.1. Dado o fato que, geralmente, pode-se sempre decompor a matriz espalhamento de forma que tenhamos equações do aspecto de f_1 ou f_2 . Mas veremos que quando passamos a assumir outros ensembles e outras classes de simetria o argumento do traço das funções deste tipo aumenta, e por sua vez, teremos o número de diagramas substancialmente elevados.

Para concluir o exemplo 1, vamos achar a variância² destas funções, para f_1 , ela é dada por

$$Var(f_{1,ECU}) = \langle f_1^2 \rangle_{ECU} - \langle f_1 \rangle_{ECU}^2. \quad (2.9)$$

O segundo termo do lado direito da equação 2.9 foi encontrado, nada mais é que a equação 2.4 ao quadrado. Precisamos agora encontrar os diagramas referentes a nova função presente no primeiro termo, diagramatizada juntamente com sua média na figura 2.6.

A função que procuramos é $f_{1,ECU}^2$, dada por

$$f_1^2 = Tr(AUBU^\dagger).Tr(AUBU^\dagger). \quad (2.10)$$

e dos diagramas obtemos que

$$\langle f_1^2 \rangle_{ECU} = V_{1,1}[(TrA)^2(TrB)^2 + TrA^2.TrB^2] + V_2[(TrA)^2.TrB^2 + TrA^2.(TrB^2)]. \quad (2.11)$$

Enquanto estivermos no ECU , os pesos são os mesmos apresentados anteriormente, portanto $V_{1,1}$ e V_2 são dados pelas equações 2.7 e 2.8, por fim a variância de $f_{1,ECU}$, devidamente

²A variância de uma variável aleatória é a medida de espalhamento em torno dos valores possíveis dessa variável aleatória [45]

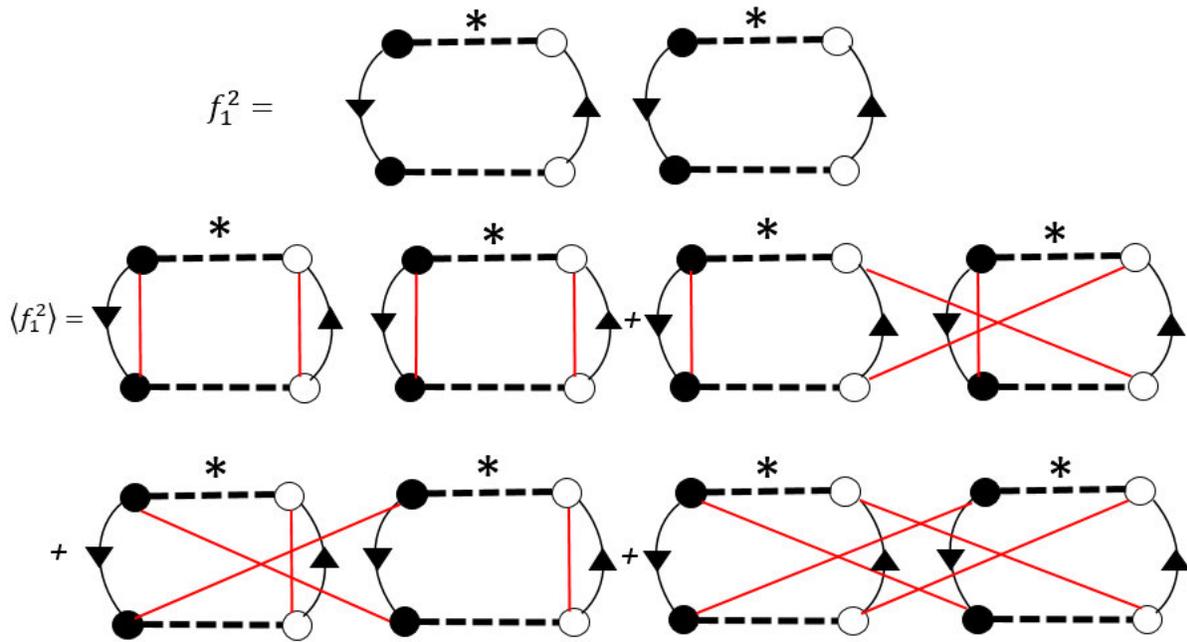


Figura 2.6: Representação diagramática de f_1^2 e $\langle f_1^2 \rangle$, ambas para o ECU.

fatorada, será:

$$Var(f_{1,ECU}) = \frac{N^2(TrA)^2(TrB)^2 - NTrA^2(TrB)^2 - N(TrA)^2TrB^2 + TrA^2TrB^2}{(N^2 - 1)N^2}. \quad (2.12)$$

Agora focamos em $f_{2,ECU}^2$, representada diagramaticamente na figura 2.7, e novamente aplicamos o mesmo tratamento.

$$f_{2,ECU}^2 = (TrAUBU^\dagger CUDU^\dagger).(TrAUBU^\dagger CUDU^\dagger). \quad (2.13)$$

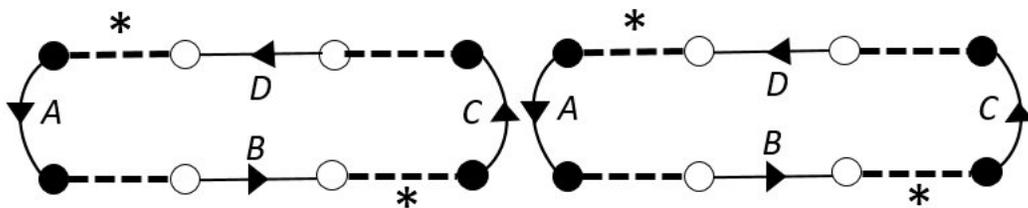


Figura 2.7: Representação diagramática de $f_{2,ECU}^2$ no ECU.

Como $f_{2,ECU}^2$ gerou 144 diagramas, escolhemos cinco membros do conjunto para serem representados na figura 2.8. Onde os respectivos pesos são dados por

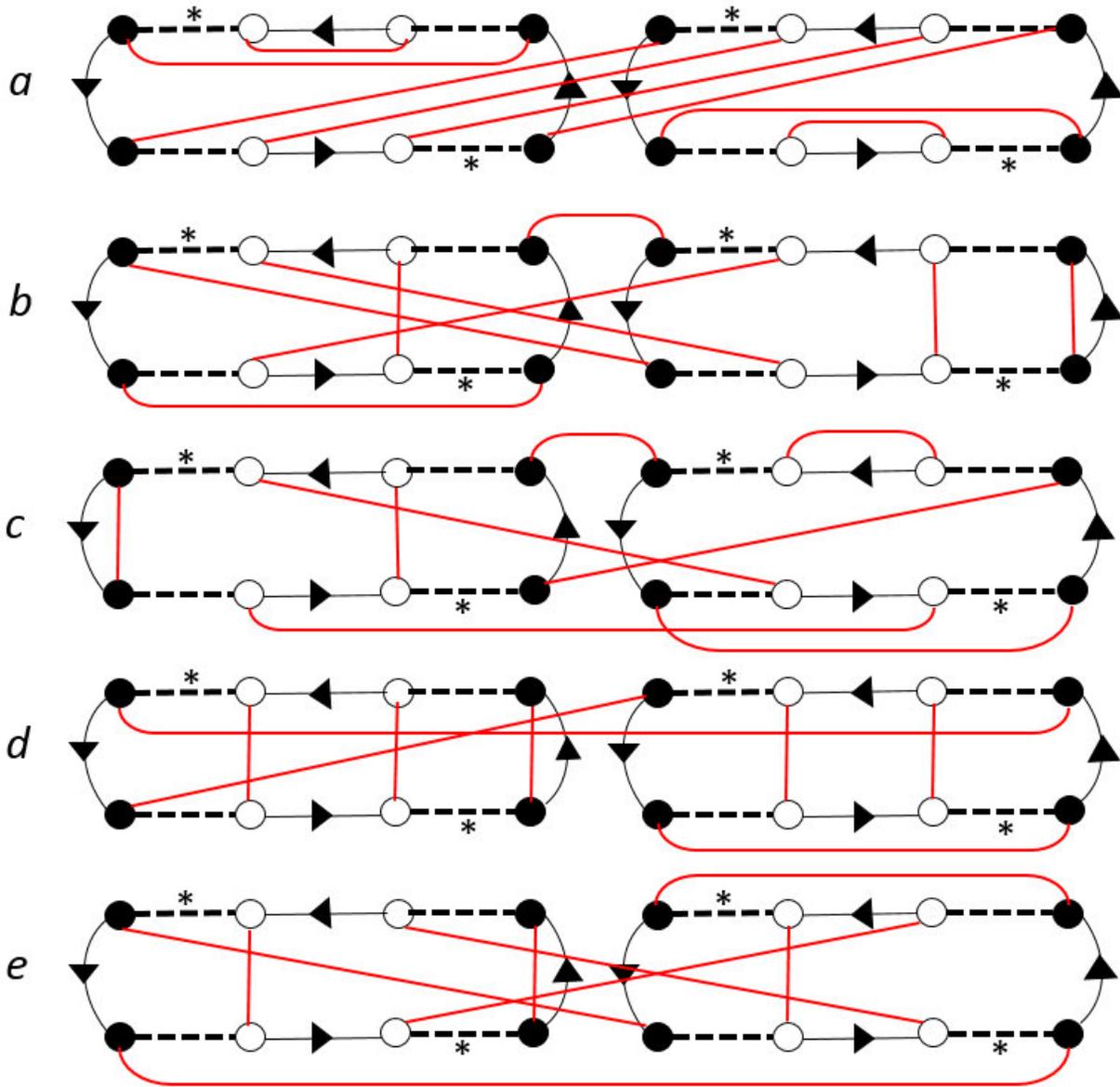


Figura 2.8: Cinco diagramas retirados dos 144 que compõem a $\langle f_2^2 \rangle_{ECU}$, em (a), (b), (c), (d) e (e) temos um representante de cada peso: $V_{1,1,1,1}$, $V_{1,1,2}$, $V_{2,2}$, $V_{1,3}$ e V_4 , respectivamente.

$$V_{1,1,1,1} = \frac{6 - 8N^2 + N^4}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}, \quad (2.14)$$

$$V_{1,1,2} = \frac{4N - N^3}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}, \quad (2.15)$$

$$V_{2,2} = \frac{6 + N^2}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}, \quad (2.16)$$

$$V_{1,3} = \frac{-3 + 2N^2}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}, \tag{2.17}$$

$$V_4 = \frac{-5N}{N^2(N^2 - 1)(N^2 - 4)(N^2 - 9)}. \tag{2.18}$$

Infelizmente não podemos apresentar a expressão da variância de $f_{2,ECU}^2$, pois não há simplificação satisfatória ocasionando uma equação com mais de 100 termos.

2.1.2 Integrando sobre o Grupo Unitário composto de Matrizes Simétricas

Para montar os diagramas do Ensemble Circular Ortogonal (ECO , $\beta = 1$) devemos levar em conta uma nova simetria da matriz espalhamento, ou seja, agora também temos: $U^T = U$, portanto $U_{ij} = U_{ji}$. Na prática, esta nova simetria permite que tenhamos por meio das linhas finas, ligações entre as bolinhas pretas/brancas e vice versa, de resto, todos os passos da subseção anterior são válidos novamente.

Exemplo 2: f_1 , classe WD e ECO ($\beta = 1$)

Assumindo as novas possibilidades de ligação e retomando a função f_1 do exemplo 1 o diagrama de sua média é dado pela figura 2.9. Com o surgimento deste novo diagrama,

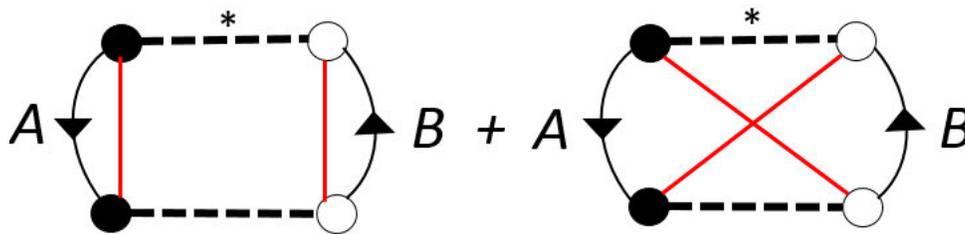


Figura 2.9: Representação diagramática de $\langle f_1 \rangle$ no ECO .

procedimento do método diagramático nos leva para:

$$\langle f_1 \rangle = V_1[TrA.TrB + TrAB]. \tag{2.19}$$

Dessa vez, as ligações pretas com brancas, vão fazer que a $\langle f_1^2 \rangle$ gere 24 diagramas, divididos nas figuras 2.10 e 2.11. Deles extraímos a expressão 2.20.

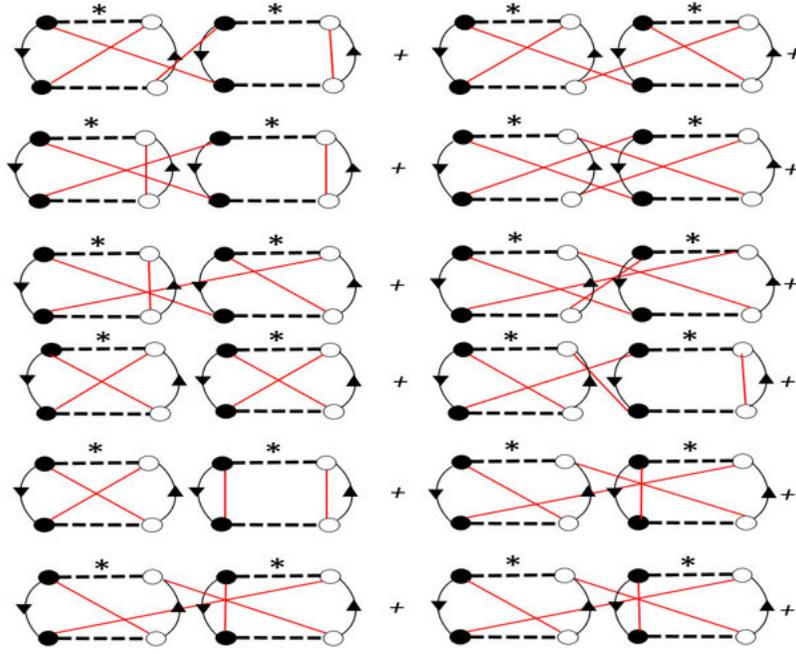


Figura 2.10: Representação diagramática dos primeiros 12 diagramas de f_1^2 , no *ECO*.

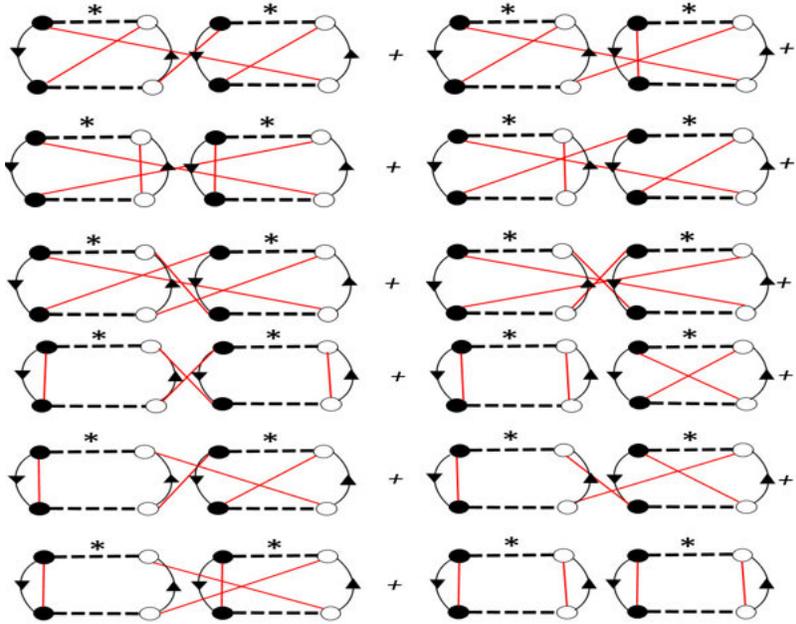


Figura 2.11: Representação diagramática dos últimos 12 diagramas de f_1^2 , ainda no *ECO*.

$$\begin{aligned}
 \langle f_1^2 \rangle = & V_{1,1}[2(\text{Tr}AB)^2 + 2\text{Tr}A\text{Tr}B\text{Tr}AB + 2\text{Tr}A^2B^2 + \text{Tr}A^2\text{Tr}B^2 + (\text{Tr}A)^2(\text{Tr}B)^2] \\
 & + V_2[2\text{Tr}A\text{Tr}B\text{Tr}AB + 4\text{Tr}A^2B^2 + 4\text{Tr}A^2B\text{Tr}B + 4\text{Tr}AB^2\text{Tr}A \\
 & + \text{Tr}A^2(\text{Tr}B)^2 + \text{Tr}B^2(\text{Tr}A)^2].
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Como não estamos mais no ECU , os pesos do exemplo 1 não servem, existem pesos específicos para este ensemble [41]

$$V_1 = \frac{1}{(N+1)}, \quad (2.21)$$

$$V_{1,1} = \frac{2+N}{N(N+1)(N+3)}, \quad (2.22)$$

$$V_2 = \frac{-1}{N(N+1)(N+3)}. \quad (2.23)$$

e utilizando as equações 2.19, 2.20 e os pesos acima podemos encontrar a variância de f_1

$$\begin{aligned} Var(f_{1,ECO}) &= \frac{(2+N)[2(TrAB)^2 + 2TrA.TrB.TrAB + 2TrA^2B^2 + TrA^2TrB^2 + (TrA)^2(TrB)^2]}{N(N+1)(N+3)} \\ &- \frac{[4TrA^2TrB^2 + 2TrA.TrB.TrAB + 4TrA^2BTrB]}{N(N+1)(N+3)} \\ &+ \frac{4TrB^2A.TrA + TrA^2(TrB)^2 + TrB^2(TrA)^2}{N(N+1)(N+3)} \\ &- \frac{(2+N)^2TrA^2.TrB^2.TrAB^2}{N^2(N+1)^2(N+3)^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Evitaremos tratar a função f_2 neste ensemble, pois a nova possibilidade de combinação vai gerar 3136 diagramas, o que acarretaria em expressões absurdamente gigantescas, o importante é notar que, apesar de trabalhoso, o procedimento é sistemático.

2.1.3 Integrando sobre o Grupo Simplético

No Ensemble Circular Simplético (ECS , $\beta = 4$) a integração da função polinomial $f(U)$ de dimensão $N \times N$ de matrizes quaterniônicas³ está associada com a integração da função $f_{ECS}(U)$ de uma matriz $N \times N$ complexa sobre o ECU ou ECO , na prática, simplesmente dobramos a dimensão da matriz do grupo unitário. Maiores detalhes podem ser encontrados em [41].

Exemplo 3: f_1 , classe WD e ECS

³Um quaternion é expresso em termos das matrizes de Pauli por: $q = a_0\mathbf{1} + i\sum_{k=1}^3 a_k\sigma_k$, com coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 complexos e $\mathbf{1}$ uma matriz 2×2 unitária [3].

Para este exemplo, vamos utilizar a função f_1 do ECO^4 , a função $f_{1,ECS}$ é encontrada da seguinte forma [41]:

1. Partimos da expressão de $f_{1,ECO}$, que é a equação 2.2, e substituímos todos os seus traços (Tr) por $-\frac{1}{2}Tr$;
2. Reaproveitamos também sua expressão para a média, $\langle f_{1,ECO} \rangle$, extraída dos diagramas das figuras 2.9, que por sua vez geraram a equação 2.19;
3. Por fim, nesta média trocamos todos os traços (Tr) por $-2Tr$ e todos os fatores numéricos N , inclusive nos respectivos pesos, por $-2N$.

Portanto, depois da aplicação do primeiro passo, obtemos:

$$f_{1,ECS} = -\frac{1}{2}f_1(U) = -\frac{1}{2}TrAU BU^\dagger. \quad (2.25)$$

Do segundo passo, obtemos a média da mesma forma que no ECO e fazemos as substituições estipuladas no terceiro passo, montamos assim, a média de f_1 do ECO como

$$\langle f_{1,ECS} \rangle = -\frac{1}{2(-2N+1)}[4TrA.TrB - 2TrAB] = \frac{1}{2N+1}[2TrA.TrB - TrAB]. \quad (2.26)$$

O tratamento seria o mesmo se quiséssemos obter a variância em qualquer um dos casos.

Vamos agora fazer a conexão entre estes resultados preliminares do MD e os importantes observáveis do transporte mesoscópico.

2.2 Os Observáveis do Transporte

De certo é bem conhecido que os resultados da estatística de contagem de cargas em cavidades caóticas, obtidos a partir da teoria de Landauer, podem expressar os principais observáveis do transporte [16], encontramos no capítulo 1 estes resultados. Foi dito também que sempre é possível decompor a matriz espalhamento de modo que estes mesmos observáveis podem ser escritos de uma forma bem peculiar, como veremos a seguir.

⁴O mesmo procedimento pode ser aplicado as funções f_1 e f_2 nos demais ensembles, apesar disso ser extremamente trabalhoso.

2.2.1 Condutância

Como vimos no capítulo 1, encontramos a condutância com relação aos blocos de transmissão da matriz espalhamento

$$G_N = G_0 \text{Tr}[tt^\dagger], \quad (2.27)$$

onde G_0 é o quantum de condutância. Podemos reescrever esta equação em termos das matrizes de projeções (*que serão explicitadas logo a seguir*) da seguinte forma

$$g = \text{Tr}[C_1 S C_2 S^\dagger], \quad (2.28)$$

onde consideramos $g = G_N/G_0$, vimos que para um caso simples de um condutor ligado a dois terminais a matriz espalhamento possui dimensão $N \times N$, com $N = N_1 + N_2$, justamente a soma dos canais abertos no guia 1 e 2, aqui entram em cena as chamadas matrizes projeções C_1 e C_2 , dadas por

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1_{N_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{N_2} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Aqui 1_{N_1} e 1_{N_2} são matrizes identidades de dimensão igual ao número de canais abertos nos respectivos guias. A soma e produto entre estas matrizes projeções geram duas características importantes

$$C_1 + C_2 = 1_N, \quad (2.31)$$

$$C_1 C_2 = 0. \quad (2.32)$$

A partir destes dados podemos encontrar a média e variância da condutância fazendo uso do método diagramático exatamente como fizemos nas seções anteriores. A melhor forma de fazermos isso é notando a semelhança entre a equação 2.28 e a função $f_1(U)$ (equação 2.2), vemos que são idênticas, com equivalência total entre os traços de A e B com os traços de

C_1 e C_2 , assim como também com os traços de U e U^\dagger e os traços de S e S^\dagger .

Vamos analisar o caso mais simples da classe WD , o ECU . Dissemos, por comparação, que a equação 2.28 é equivalente a equação da função $f_{1,ECU}$ e quando utilizamos o MD na mesma encontramos que

$$\langle f_1 \rangle_{ECU} = V_1 Tr A.Tr B. \quad (2.33)$$

Se as duas equações são equivalentes, seus respectivos diagramas e pesos também são, podemos ver isso na figura 2.12 e portanto suas médias são iguais.

Ainda explorando a comparação dos diagramas está claro que os traços de A e B na

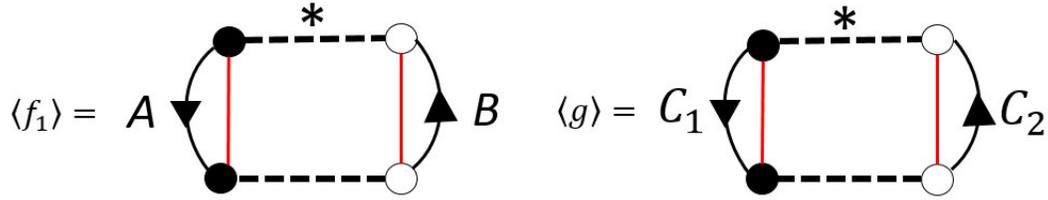


Figura 2.12: Representação diagramática de $\langle f_1 \rangle_{ECU}$ e $\langle g \rangle_{ECU}$, ambos os casos para classe WD .

média de f_1 , são justamente os traços de C_1 e C_2 para condutância, (*o mesmo vale para os traços de U e S , U^\dagger e S^\dagger*). Podemos concluir pelas relações 2.29 e 2.30 que

$$Tr A = Tr C_1 = N_1, \quad (2.34)$$

$$Tr B = Tr C_2 = N_2. \quad (2.35)$$

Ao substituir estes traços e o peso $V_1 = \frac{1}{N}$ na expressão para $\langle f_1 \rangle_{ECU}$, concluímos que

$$\langle f \rangle_{ECU} = \langle g \rangle_{ECU} = \frac{N_1 N_2}{N}. \quad (2.36)$$

Vamos continuar, fazendo o mesmo procedimento para variância de g , dada por

$$Var(g)_{ECU} = \langle g_{ECU}^2 \rangle - \langle g_{ECU} \rangle^2. \quad (2.37)$$

A figura 2.13 mostra que a representação diagramática de g^2 é a mesma de f_1^2 , de novo

temos total equivalência entre seus diagramas e portanto a variância de g é igual a variância de f_1 , dada pela equação 2.12.

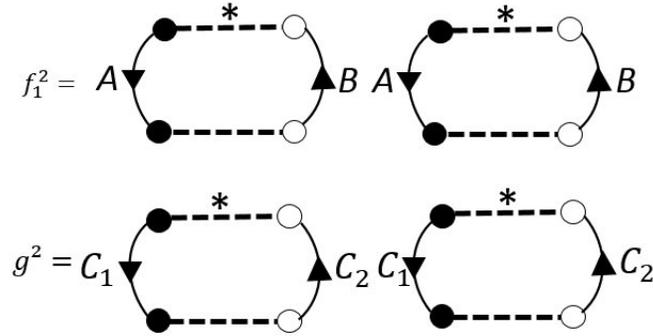


Figura 2.13: Representação diagramática de $\langle f_1 \rangle_{ECU}$ e $\langle g \rangle_{ECU}$, ambos os casos para classe WD .

$$Var(g_{ECU}) = \frac{N_1^2 N_2^2}{(N^2 - 1)N^2}. \quad (2.38)$$

Da mesma forma, aplicando este procedimento a todos os outros ensembles da classe WD , obteremos as seguintes expressões [41]

$$\langle g \rangle = \frac{\beta N_1 N_2}{\beta N + 2 - \beta} \quad (2.39)$$

e sua variância

$$Var(g) = \frac{2\beta N_1 N_2 (\beta N_1 + 2 - \beta) (\beta N_2 + 2 - \beta)}{(\beta N + 2 - 2\beta) (\beta N + 2 - \beta)^2 (\beta N + 4 - \beta)}. \quad (2.40)$$

Onde o índice de simetria β foi inserido de forma a gerar precisamente as respectivas expressões para os ensembles ECU ($\beta = 2$), ECO ($\beta = 1$) e ECS ($\beta = 4$), generalizando a condutância e sua variância para classe WD .

Com efeito, assumindo $\beta = 2$ nestas equações, obtemos exatamente os resultados encontrados pelas equações 2.36 e 2.38 (*no caso da variância, um certo trabalho matemático é necessário*). Isto conclui a análise.

2.2.2 Ruído de Disparo

A obtenção do ruído de disparo é feita usando o mesmo princípio, vamos utilizar a mesma ordem estrutural aplicada na análise da condutância na seção anterior. De certo, no capítulo

1 também encontramos uma expressão para o ruído de disparo em termos dos blocos de transmissão da matriz espalhamento. Para $P_0 = \frac{2e^3|V|}{h}$, vimos que

$$P_N = P_0[Tr[tt^\dagger(1 - tt^\dagger)]] \tag{2.41}$$

ou ainda

$$P_N/P_0 = p = Trtt^\dagger - Tr(tt^\dagger)^2. \tag{2.42}$$

Que em termos das matrizes de projeção C_1 e C_2 , assume a forma

$$p = TrC_1SC_2S^\dagger - Tr(C_1SC_2S^\dagger)^2. \tag{2.43}$$

No lado direito dessa igualdade, observamos a presença da condutância (g) no primeiro termo. Vamos chamar o segundo termo simplesmente de h , assim

$$p = g - h. \tag{2.44}$$

Com $\langle g \rangle$ determinado na seção anterior, só precisamos determinar $\langle h \rangle$ para encontrar a média do ruído de disparo, mas já fizemos isso, pois novamente há total semelhança entre as equações de h e a função $f_{2,ECU}$ do capítulo 2, levando a equivalência dos diagramas e consequentemente a mesma média. A semelhança está ilustrada na figura 2.14.

Pois bem, aproveitando os resultados da aplicação do MD para a $\langle f_2 \rangle_{ECU}$ e após um

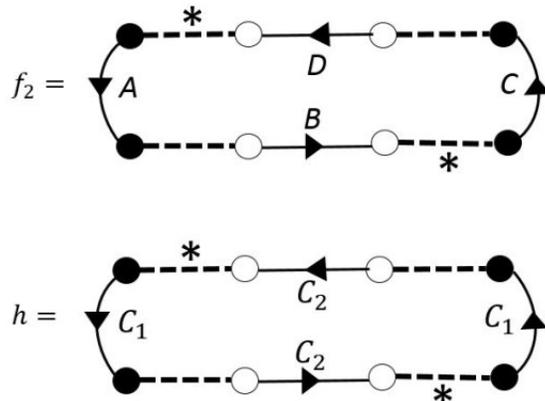


Figura 2.14: Representação diagramática de $f_{2,ECU}$ e h , ambos os casos para classe WD .

longo esforço matemático para simplificação dos termos, chegamos a [44]

$$\langle h \rangle = \frac{N_1 N_2 (N_1^2 + N_2^2 + N_1 N_2 - 2N + 1 + \frac{4N-6}{\beta} + \frac{4}{\beta^2})}{(N - 2 + \frac{2}{\beta})(N - 1 + \frac{2}{\beta})(N - 1 + \frac{4}{\beta})} \quad (2.45)$$

e portanto, com $\langle p \rangle = \langle g \rangle - \langle h \rangle$, obtemos que

$$\langle p \rangle = \frac{N_1 N_2 (N_1 - 2 + \frac{2}{\beta})(N_2 - 2 + \frac{2}{\beta})}{(N - 2 + \frac{2}{\beta})(N - 1 + \frac{2}{\beta})(N - 1 + \frac{4}{\beta})}. \quad (2.46)$$

Que da mesma forma anterior, $\beta = 1, 2$ ou 4 , abrange todos os ensembles da classe WD . Obviamente, a eficácia do método diagramático foi observada com a comparação destas expressões encontradas, para as médias da condutância (*e sua variância*) e do ruído e disparo, com as expressões encontradas em outros trabalhos relevantes [46], onde foram utilizadas outras técnicas matemáticas para obtenção das mesmas equações. Da mesma forma que há confirmação por meio de simulações computacionais confiáveis, garantindo a eficácia do método.

2.2.3 Fator Fano e o Limite semi-clássico

Com $\langle g \rangle$ e $\langle p \rangle$ determinados, podemos encontrar o fator Fano da cavidade de guias normais, o qual esperamos ser $1/4$ para estes dispositivos balísticos. No regime semi-clássico, ou seja, N_1 e $N_2 \gg 1$, expandimos as equações 2.39 e 2.46 chegando a

$$\langle g \rangle = \frac{N_1 N_2}{N} + (1 - 2/\beta) \frac{N_1 N_2}{N^2} + \mathcal{O}(N^{-3}), \quad (2.47)$$

$$\langle p \rangle = \frac{N_1^2 N_2^2}{N^3} - (1 - 2/\beta) \frac{N_1 N_2 (N_1^2 - N_2^2)}{N^4} + \mathcal{O}(N^{-1}) \quad (2.48)$$

Nas duas expressões, o primeiro termo corresponde a contribuição clássica, enquanto que os outros termos representam a correção quântica do limite semi-clássico, conhecida como localização fraca⁵. Interessante notar que ela "desaparece" para $\beta = 2$, ou seja, quando temos quebra da SRT . Para $\beta = 1$ e 4 , vimos que há preservação da SRT e portanto o efeito de localização fraca persiste, como esperado. Estamos aptos a encontrar o fator Fano

⁵Efeito de interferência quântica nas trajetórias que aumenta a probabilidade de retorno a origem, este efeito pode levar ao aumento ou diminuição da condutância do sistema, como mostra a figura 2.15

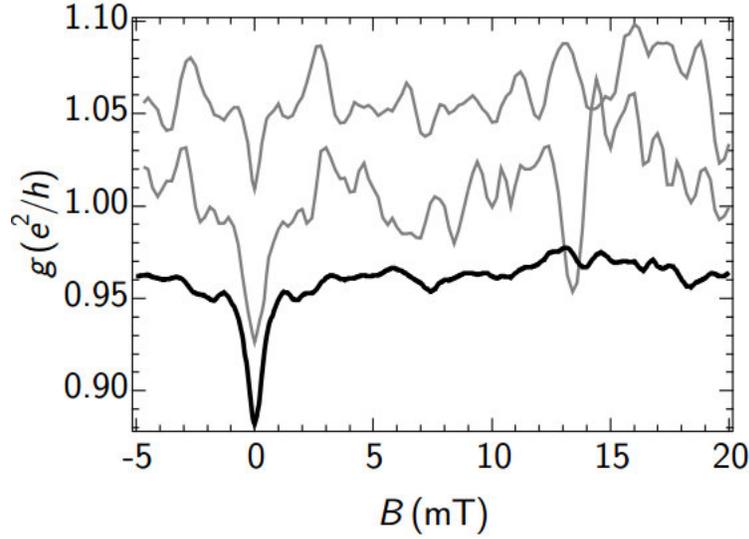


Figura 2.15: Média da condutância em função do campo magnético. Note que em $B = 0$, temos presença da *SRT* e portanto há interferência construtiva entre as trajetórias revertidas no tempo, causando a diminuição da condutância. Para qualquer $B \neq 0$, temos o efeito contrário, o campo magnético quebra a *SRT* eliminando a retro-interferência e causando o aumento da condutancia, figura retirada de [47].

da cavidade ligada por guias ideais de metais normais F_N , dado pelo quociente entre os termos principais das expansões de $\langle p \rangle$ e $\langle g \rangle$ que acabamos de encontrar, portanto

$$F_N = \frac{\langle p \rangle}{\langle g \rangle} \quad (2.49)$$

nos levando a

$$F_N = \frac{N_1 N_2}{N^2}. \quad (2.50)$$

Que, se fizermos os guias simétricos, $N_1 = N_2$, achamos exatamente o resultado que esperavamos

$$F_N = \frac{1}{4}. \quad (2.51)$$

Este valor, mostra outra característica importante do fator Fano, ele pode ser usado para caracterizar um dispositivo balístico ou difusivo. De fato $\frac{1}{4}$ é o esperado para longos tempos de permanência dentro de uma cavidade cática de guias normais, como vimos na seção (1.5).

Capítulo 3

Cálculos da Média da Condutância e do Ruído de Disparo Normal-Supercondutor

“The noise is the signal”

-Rolf Landauer

3.1 Técnica Diagramática para classe Quiral

No capítulo anterior examinamos os observáveis do transporte por meio da aplicação do método diagramático para a classe de Wigner-Dyson (WD). Desta vez, faremos uma extensão do método diagramático para examina-los nos ensembles BDI e CII , da classe quiral (ch). Primeiramente vamos entender do que se trata a quiralidade, ela está associada a simetria espacial¹ dos objetos ou sistemas, um objeto (*ou sistema*) é dito quiral se não pode ser sobreposto a sua imagem especular, veja a figura 3.1. Assim como a classe WD , a classe Quiral também apresenta três ensembles distintos, como mostrou a tabela (1.1), porém há presença da simetria de sub-rede em todos eles, podemos resumir que:

¹A quiralidade é uma designação associada à química, mas simultaneamente é um fenômeno que se manifesta em tudo o que é orgânico (*e inorgânico também*), portanto está presente na física, matemática e biologia, que por sua vez, servem de base para diversas outras áreas do conhecimento.

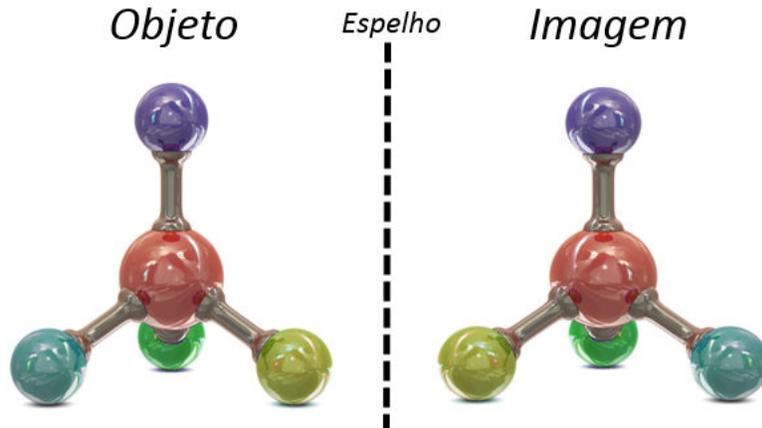


Figura 3.1: Exemplo simplificado de quiralidade, onde o objeto é uma representação da molécula de carbono, note que mesmo havendo rotação da imagem, não haverá sobreposição perfeita entre ela e o objeto.

- Se a matriz espalhamento do sistema é descrita pelo ensemble circular ortogonal quiral ($chECO$), temos preservação da SRT , SLS e SRS , ou seja, teremos campo magnético externo nulo e sem interação spin-órbita;
- Se a matriz espalhamento do sistema é descrita pelo ensemble circular unitário quiral ($chECU$), temos quebra da SRT devido ao campo magnético externo ser diferente de zero, permanece a SLS e não há simetria partícula-buraco PHS ;
- Se a matriz espalhamento do sistema é descrita pelo ensemble circular simplético quiral ($chECS$), aqui teremos a presença da SLS e SRT , a SRS é quebrada por uma forte interação spin-órbita.

Uma observação importante é que na ausência de campo magnético externo, ambos $chCOE$ e $chCSE$ preservam também a simetria partícula-buraco (PHS) [42], como esta simetria fundamental é relevante na junção NS , vamos focar apenas nos $chECO$ e $chECS$.

3.1.1 Integrando sobre o Grupo Ortogonal

As matrizes espalhamento com simetria de sub-rede (SLS), presentes na classe Quiral, podem ser decompostas em produtos de matrizes ortogonais [33], mas infelizmente o método de integração utilizado no capítulo anterior não pode ser usado diretamente para calcular médias sobre os grupos ortogonais, por isso é preciso uma extensão do método diagramático

para podermos aplica-lo nesta nova classe. Esta extensão foi feita minuciosamente em [48] (*incluindo os novos pesos do grupo ortogonal*), para resumir, vamos utilizar novamente as funções $f_1(U)$ e $f_2(U)$ dadas pelas equações 2.2 e 2.3.

A figura 3.2 mostra os diagramas destas funções, onde já é possível ver uma pequena diferença entre os diagramas das mesmas funções com relação a classe WD , perceba que agora não temos mais o sinal " * " sobre nenhuma das linhas pontilhadas, isto se deve a ortogonalidade da matriz espalhamento, neste caso: $U^\dagger = U^T$, envolvidas com a classe quiral, ou seja, U possui entradas reais. Objetivamente, vimos que na classe WD , uma bolinha ligada a uma linha pontilhada (*com " * "*) era conectada a outra bolinha (*de uma linha pontilhada sem " * "*), aqui, na classe quiral, está restrição não existe mais e todas as ligações são possíveis.

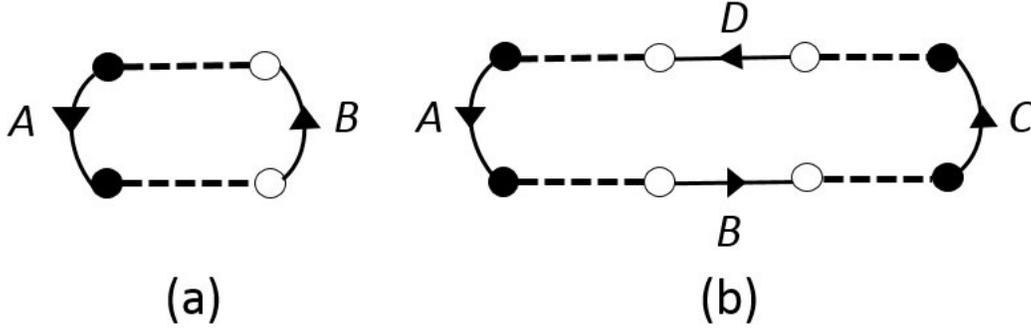


Figura 3.2: Representação diagramática de f_1 em (a) e f_2 em (b), ambas no chECO.

Exemplo 1: f_1 , chECO

Vamos tratar primeiro a função $f_1 = Tr AUBU^\dagger$, com base nos diagramas das figuras 3.2 (a) e 3.3 podemos montar as expressões para $f_{1,chECO}$ e $\langle f_{1,chECO} \rangle$, respectivamente.

$$f_{1,chECO} = Tr AUBU^\dagger, \quad (3.1)$$

$$\langle f_{1,chECO} \rangle = V_1 Tr A.Tr B. \quad (3.2)$$

Onde V_1 faz parte do conjuntos de pesos específicos do grupo ortogonal e podem ser encontrados em [48]. A busca pela variância requer a $\langle f_1^2 \rangle$, gerando os nove diagramas da figura 3.4. Aplicando os passos do MD , a expressão desta média fica:

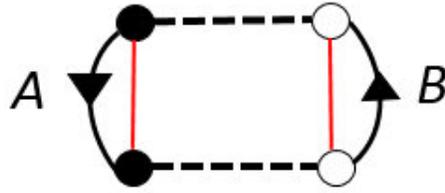


Figura 3.3: Representação diagramática da $\langle f_{1,chECO} \rangle$.

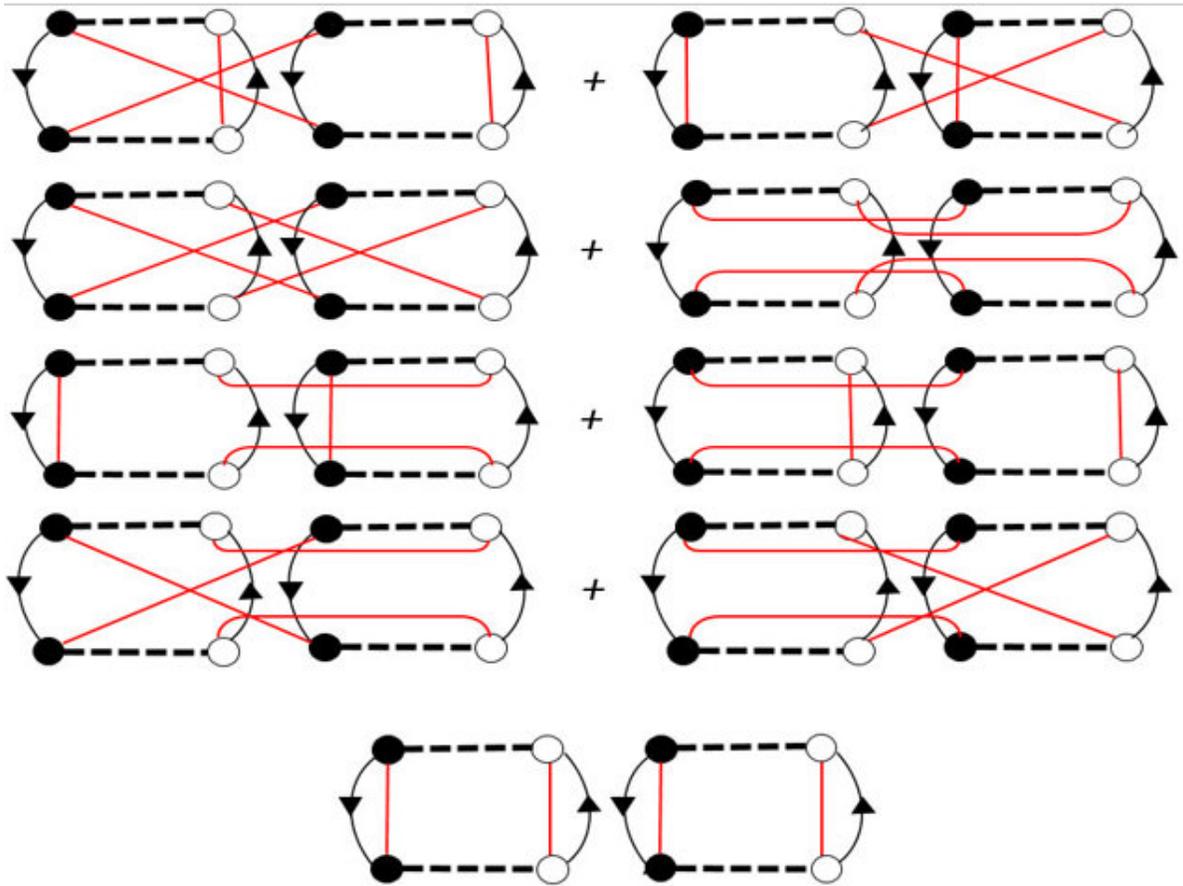


Figura 3.4: Todos os diagramas que compõem a $\langle f_{1,chECO}^2 \rangle$.

$$\begin{aligned}
 \langle f_{1,chECO}^2 \rangle &= V_{1,1}[(TrA)^2.(TrB)^2 + TrA^2.TrB^2 + TrA^2.TrB^2] \\
 &+ V_2[(TrA)^2.TrB^2 + TrA^2.(TrB)^2 + TrA^2.TrB^2 \\
 &+ TrA^2.TrB^2 + TrA^2.(TrB)^2 + (TrA)^2.TrB^2].
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

e conseqüentemente a variância de f_1 é dada por

$$\begin{aligned}
Var(f_{1,chECO}) &= V_{1,1}[(TrA)^2.(TrB)^2 + TrA^2.TrB^2 + TrA^2.TrB^2] \\
&+ V_2[(TrA)^2.TrB^2 + TrA^2.(TrB)^2 + TrA^2.TrB^2 + TrA^2.TrB^2] \\
&+ TrA^2.(TrB)^2 + (TrA)^2.TrB^2 - V_1^2[(TrA)^2.(TrB)^2]. \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Os pesos para este grupo são descritos detalhadamente em [48], os utilizados neste trabalho são

$$V_1 = \frac{1}{N}; \quad (3.5)$$

$$V_{1,1} = \frac{N+1}{N(N-1)(N+2)}; \quad (3.6)$$

$$V_2 = -\frac{1}{N(N-1)(N+2)}; \quad (3.7)$$

$$V_{1,1,1,1} = \frac{N^4 + 7N^3 + N^2 - 35N - 6}{N(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)}; \quad (3.8)$$

$$V_{1,1,2} = \frac{-N^3 - 6N^2 - 3N + 6}{N(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)}; \quad (3.9)$$

$$V_{2,2} = \frac{N^2 + 5N + 18}{N(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)}; \quad (3.10)$$

$$V_{1,3} = \frac{2N + 8}{(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)}; \quad (3.11)$$

$$V_4 = \frac{-5N - 6}{N(N+1)(N+2)(N+4)(N+6)(N-1)(N-2)(N-3)}. \quad (3.12)$$

Exemplo 2: f_2 , chECO

O mesmo princípio vale para $f_2 = TrABU^\dagger CUDU^\dagger$ (figura 3.2 (b)), os diagramas de sua média são mostrados na figura 3.5, ao analisa-los, chegamos a

$$\begin{aligned}
 \langle f_{2,chECO} \rangle &= V_{1,1}[TrA.TrBD.TrC + TrAC.TrB.TrD + TrAC.TrBD] \\
 &+ V_2[TrAC.TrBD + TrA.TrBD.TrC + TrAC.TrBD \\
 &+ TrA.TrB.TrD.TrC + TrAC.TrBD + TrAC.TrB.TrD]. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

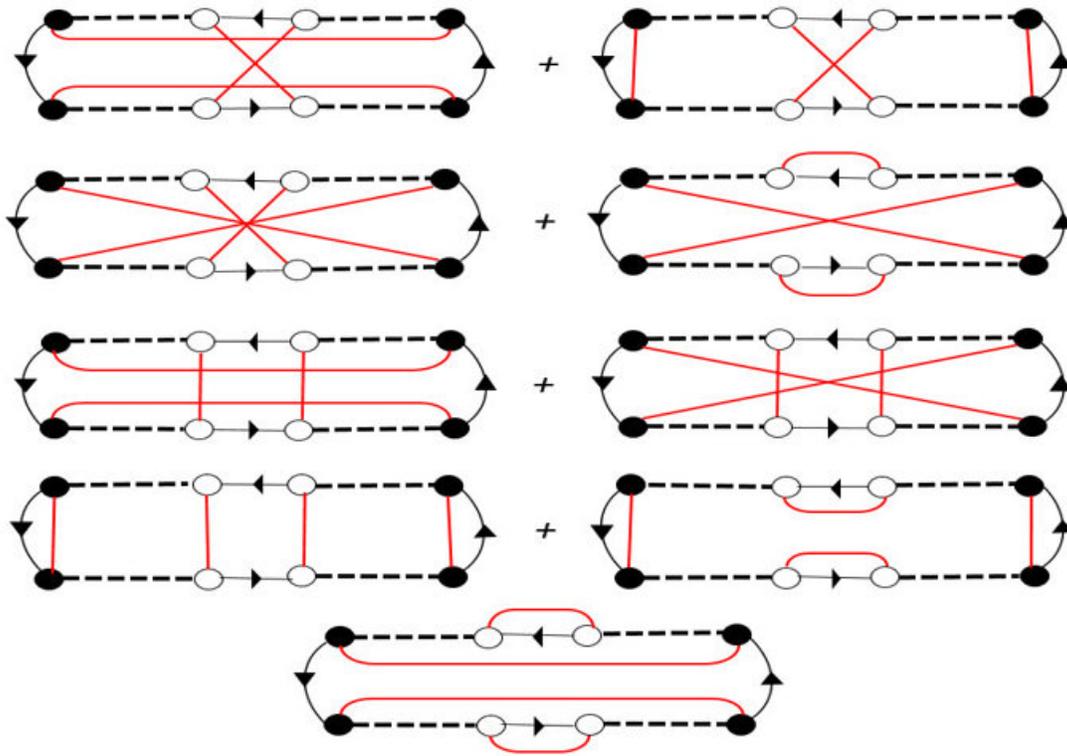


Figura 3.5: Os nove diagramas que compõem a $\langle f_{2,chECO} \rangle$.

O maior desafio deste trabalho apareceu quando procuramos pela variância de f_2 , pois precisamos de $\langle f_{2,chECO}^2 \rangle$. Com o relaxamento da restrição presente na classe anterior de WD as combinações possíveis geram 11025 diagramas, depois de construídos, veja alguns exemplos na figura 3.6, a expressão encontrada para a variância é colossal e portanto ela será suprimida.

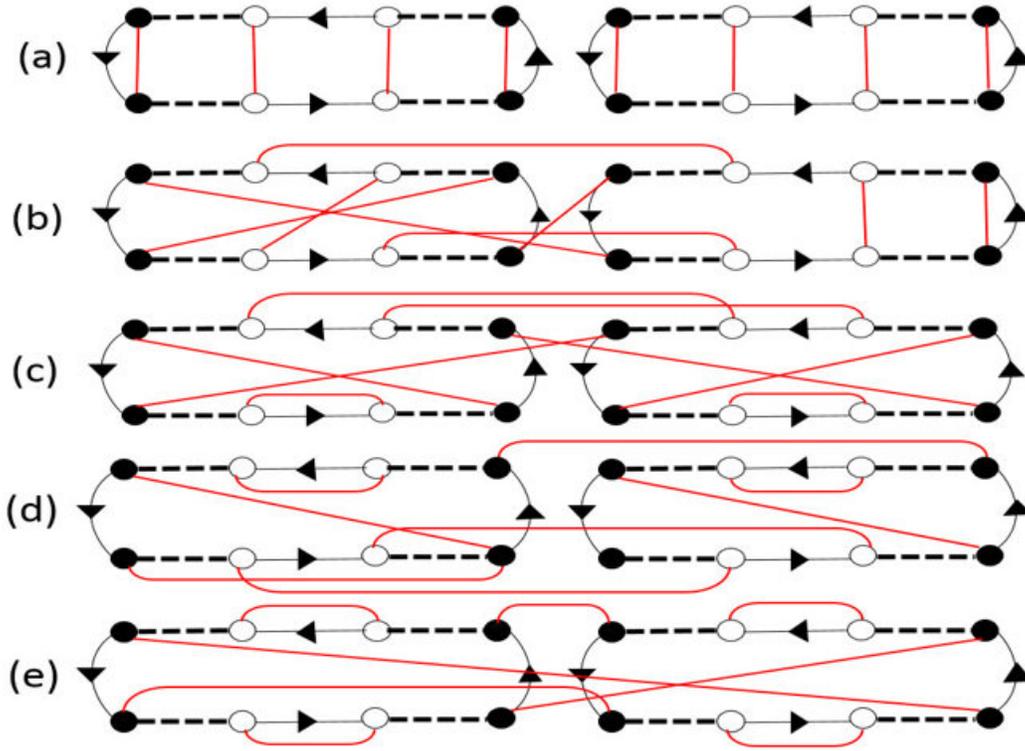


Figura 3.6: Cinco membros dos 11025 diagramas que compõem a $\langle f_{2,chECO}^2 \rangle$, em (a), (b), (c), (d) e (e) temos um representante de cada peso envolvido, $V_{1,1,1,1}$, $V_{1,1,2}$, $V_{2,2}$, $V_{1,3}$ e V_4 , respectivamente.

3.1.2 Integrando sobre o Grupo Ortogonal Simplético

A obtenção das expressões para o *chECS* são encontradas utilizando o mesmo procedimento para encontrar o *ECS* da classe *WD*, descrito detalhadamente na sub-seção 2.1.3, desta forma, encontramos as expressões de:

$$\langle f_{1,chECS} \rangle = 4V_1 TrA.TrB, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \langle f_{1,chECS}^2 \rangle &= V_{1,1}[(-2TrA)^2.(-2TrB)^2 + 4TrA^2.TrB^2 + 4TrA^2.TrB^2] \\ &+ V_2[(-2TrA)^2 - 2TrB^2 - 2TrA^2.(-2TrB)^2 + 4TrA^2.TrB^2 \\ &+ 4TrA^2.TrB^2 - 2TrA^2.(-2TrB)^2 + (-2TrA)^2 - 2TrB^2], \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f_{2,chECS} \rangle &= V_{1,1}[-8TrA.TrBD.TrC - 8TrAC.TrB.TrD + 4TrAC.TrBD] \\ &+ V_2[4TrAC.TrBD - 8TrA.TrBD.TrC + 4TrAC.TrBD \\ &+ 16TrA.TrB.TrD.TrC + 4TrAC.TrBD - 8TrAC.TrB.TrD]. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Portanto com a variância de $f_{1,ECS}$, definida por

$$Var(f_{1,ECS}) = \langle f_{1,chECS}^2 \rangle - \langle f_{1,chECS} \rangle^2. \quad (3.17)$$

Que pode ser obtida com a substituição das equações 3.14 e 3.15. No caso da variância de $f_{2,ECS}$ esbarramos na mesma dificuldade ligada ao tamanho descomunal da expressão resultante encontrada, mas no que diz respeito ao procedimento, ele é equivalente ao que foi feito anteriormente.

3.2 Os Observáveis do Transporte

Vimos que a classificação dos estados topológicos da matéria (*o tenfold way*), possui cinco classes de simetria topológicas, relacionadas a supercondutores e isolantes, ambos topológicos. Cada uma destas classes de simetria possui um número quântico topológico Q . Ele indica o número de estados superficiais protegidos nas extremidades do condutor. A principal distinção entre isolantes e supercondutores topológicos esta nos valores que o número topológico pode assumir, com $Q \in \mathbb{Z}_2$ (± 1) para supercondutores e $Q \in \mathbb{Z}$ para isolantes. Uma abordagem mais técnica pode ser encontrada nas referências [10, 48, 49].

O fato é que de acordo com o *tenfold way*, a combinação das simetrias quiral e partícula-buraco leva nossa cavidade da classe D para a classe BDI , extendendo assim os valores de Q de \mathbb{Z}_2 para \mathbb{Z} . O número topológico pode ser expresso em termos do traço da matriz reflexão de Andreev

$$Q = Tr(r_{he}) \quad (3.18)$$

e como vimos no capítulo 1, a condutância da junção NS é também dada em termos desta matriz reflexão, temos então uma profunda relação entre a topologia e o transporte de carga.

O sistema abordado neste capítulo consiste numa cavidade caótica balística parecida com a que estudamos no capítulo 2, mas como um dos guias normais substituído por um supercondutor topológico, figura 3.7.

Como não desejamos trabalhar com o que acontece dentro do supercondutor, vamos deixar de tratar a transmissão e passar a tratar da reflexão, vimos que neste contexto, os principais ingredientes envolvidos na incidência e reflexão das amplitudes das excitações dos elétrons (e) e buracos (h) na junção NS era a reflexão de Andreev e uma matriz $2N \times 2N$, a chamada matriz reflexão $r(E)$.

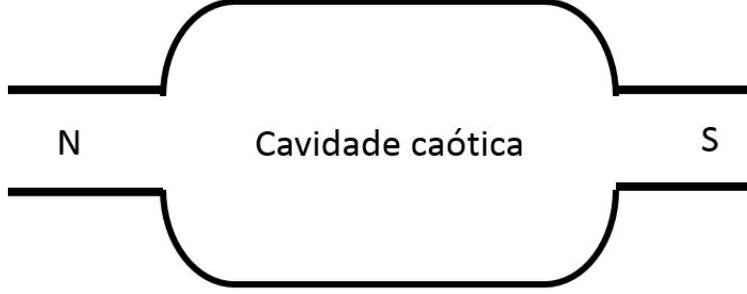


Figura 3.7: Cavidade caótica ligada a um guia metal-normal e outro supercondutor.

$$r = \begin{pmatrix} r_{ee} & r_{eh} \\ r_{he} & r_{hh} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

onde introduzimos a matriz de Pauli τ_x , que age sobre os graus de liberdade elétron-buraco [10]. A classe quiral na presença do supercondutor preserva ambas as simetrias (CHS) e Elétron-buraco/Partícula-Buraco (PHS). Vamos primeiramente assumir que as simetrias SRT e SRS foram quebradas, pela presença de campo magnético externo e um forte acoplamento spin-orbita, respectivamente [10]. As simetrias CHS e PHS são dadas por

$$\tau_x r(-E) \tau_x = \begin{cases} r^*(E) & (PHS) \\ r^\dagger(E) & (CHS) \end{cases} \quad (3.21)$$

Tomadas juntas, elas implicam que $r = r^T$ é uma matriz simétrica, se considerarmos a matriz reflexão no nível de Fermi ($E = 0$) a relação 3.21 assume a forma

$$r_{ee} = r_{hh}^* = r_{ee}^T, \quad (3.22)$$

$$r_{he} = r_{eh}^* = r_{he}^\dagger. \quad (3.23)$$

Com isso em mente e sabendo que a matriz reflexão é unitária ($rr^\dagger = \mathbf{1}$), podemos definir o produto $\tau_x r$, que é unitário e Hermitiano, ou seja, possui autovalores ± 1 , desta forma vemos que

$$Tr(\tau_x r) = Tr(r_{he}) + Tr(r_{eh}). \quad (3.24)$$

Mas da relação $r_{eh}^* = r_{he}^\dagger$ e do fato que o operador traço torna indiferente a transposição, os traços da equação acima são iguais, assim

$$\frac{1}{2}Tr(\tau_x r) = Tr(r_{he}). \quad (3.25)$$

Assim sendo, o número topológico $Q \in (-N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N)$ é dado pelo traço [10]

$$Q = \frac{1}{2}Tr(\tau_x r) = Tr(r_{he}). \quad (3.26)$$

Que é exatamente a equação 3.18 [8, 49]. Ainda baseados nesta relação podemos definir uma matriz diagonal D_Q da seguinte forma: $Tr D_Q = 2Q$, que vai simplificar a análise diagramática como veremos. No capítulo 1 encontramos as expressões para a condutância (G_{NS}) e o ruído de disparo (P_{NS}) na junção normal-supercondutora, invocado estas expressões novamente

$$\frac{G_{NS}}{e^2/\pi\hbar} = Tr[r_{he}r_{he}^\dagger], \quad (3.27)$$

$$\frac{P_{NS}}{4e^3|V|/\pi\hbar} = Tr[r_{he}r_{he}^\dagger(1 - r_{he}r_{he}^\dagger)]. \quad (3.28)$$

Com $G_0 = \frac{e^2}{\pi\hbar}$, $P_0 = \frac{4e^3|V|}{\pi\hbar}$ e $h_{NS} = Tr[(r_{he}r_{he}^\dagger)^2]$, ainda podemos rescrever o ruído de disparo da seguinte forma

$$\frac{P_{NS}}{P_0} = \frac{G_{NS}}{G_0} - h_{NS}. \quad (3.29)$$

Utilizando a mesma ideia do capítulo 2, podemos rescrever a matriz reflexão em termos de novos projetores P_1 e P_2 , definidos por

$$P_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_N \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Portanto, as seguintes expressões servirão como nosso ponto de partida

$$\frac{G_{NS}}{G_0} = Tr[P_1 r P_2 r^\dagger], \quad (3.32)$$

$$h_{NS} = Tr[P_1 r P_2 r^\dagger P_1 r P_2 r^\dagger], \quad (3.33)$$

$$Var(G_{NS}/G_0) = \langle G_{NS}^2 \rangle - \langle G_{NS} \rangle^2, \quad (3.34)$$

$$\frac{P_{NS}}{P_0} = \frac{G_{NS}}{G_0} - h_{NS}. \quad (3.35)$$

As simetrias elétron-buraco ($r = \tau_x r^* \tau_x$) e quiral ($r = r^T$) possibilitam reescrever a matriz reflexão como

$$r = -ie^{i\tau_x \theta} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T e^{i\tau_x \theta}. \quad (3.36)$$

Onde foi feito apenas uma manipulação matemática para deixá-la nesta forma. A matriz \mathcal{O} é real e ortogonal ($\mathcal{O}\mathcal{O}^T = 1$), $\theta = \frac{\pi}{4}$ e τ_x é a matriz de Pauli usual. Vamos primeiramente tratar o termo $e^{i\tau_x \theta}$ presente nesta equação, evocando a série exponencial, temos que

$$e^{i\tau_x \theta} = \mathbb{I} + i\tau_x \theta + \frac{(i\tau_x \theta)^2}{2!} + \frac{(i\tau_x \theta)^3}{3!} + \frac{(i\tau_x \theta)^4}{4!} + \frac{(i\tau_x \theta)^5}{5!} + \dots \quad (3.37)$$

Que pode ser arranjada da seguinte forma

$$\begin{aligned} e^{i\tau_x \theta} &= \mathbb{I} \left(1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \frac{1}{6!} \theta^6 \dots \right) \\ &+ i\tau_x \left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \frac{1}{7!} \theta^7 \dots \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dentro destes dois parênteses, podemos perceber duas expansões importantes, cosseno e seno, portanto

$$e^{i\tau_x \theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(\theta) + i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sen(\theta) \quad (3.39)$$

Com $\theta = \frac{\pi}{4}$ e realizando as devidas operações, chegamos a

$$e^{i\tau_x\theta} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbb{I} + i\tau_x) \quad (3.40)$$

Vamos guardar este resultado e retornar a equação da condutância 3.32, fazendo uso da nova representação de r dada pela expressão 3.36, chegaremos a

$$\frac{G_{NS}}{G_0} = Tr[P_1(-ie^{i\tau_x\theta}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T e^{i\tau_x\theta})P_2(ie^{-i\tau_x\theta}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T e^{-i\tau_x\theta})].$$

Presupondo que

$$\mathbb{A} = ie^{-i\tau_x\theta}P_1ie^{i\tau_x\theta}, \quad (3.42)$$

$$\mathbb{B} = ie^{i\tau_x\theta}P_2ie^{-i\tau_x\theta}. \quad (3.43)$$

e utilizando o resultado que guardamos, equação 3.40, encontraremos, por exemplo, que \mathbb{A} é

$$\mathbb{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbb{I} - i\tau_x)P_1\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbb{I} + i\tau_x). \quad (3.44)$$

Que vai gerar como resultado

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \tau_y) \quad (3.45)$$

Os mesmos passos nos levam a uma equação exatamente idêntica para \mathbb{B} , portanto

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \tau_y). \quad (3.46)$$

3.3 A condutância normal-supercondutora com simetria de rotação de spin (G_{NS})

Em termos de \mathbb{A} e \mathbb{B} a condutância normal-supercondutora tem a forma

$$\frac{G_{NS}}{G_0} = Tr(\mathbb{A}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{B}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T). \quad (3.47)$$

Mas acabamos de encontrar \mathbb{A} e \mathbb{B} , portanto

$$\frac{G_{NS}}{G_0} = Tr \left[\frac{1}{2}(\mathbb{I} - \tau_y)\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \tau_y)\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T \right]. \quad (3.48)$$

Que por sua vez, nos leva a

$$\begin{aligned} \frac{G_{NS}}{G_0} &= \frac{1}{4}Tr[\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T \\ &\quad - \mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T \\ &\quad - \tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T \\ &\quad + \tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Evocando a propriedade $\mathcal{O}\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^T\mathcal{O} = \mathbb{I}$ e analisando cada termo do traço acima, veremos que

$$Tr[\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T] = Tr(D_Q^2) = 2N, \quad (3.50)$$

$$Tr[-\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T] = 0, \quad (3.51)$$

$$Tr[-\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T] = 0. \quad (3.52)$$

O quarto termo permanece inalterado, chegamos então a

$$G_{NS} = \frac{1}{4}G_0 [2N + Tr(\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)]. \quad (3.53)$$

Indubitavelmente, fica clara a semelhança entre o termo $Tr(\tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)$ e a função $f_{2, chECO}$ utilizada no exemplo 2 deste capítulo, portanto, podemos fazer um tratamento semelhante ao feito em f_2 com o método diagramático para encontrar $\langle G_{NS} \rangle$ e $Var(G_{NS})$, vale salientar que as matrizes τ_y e D_Q assumem que

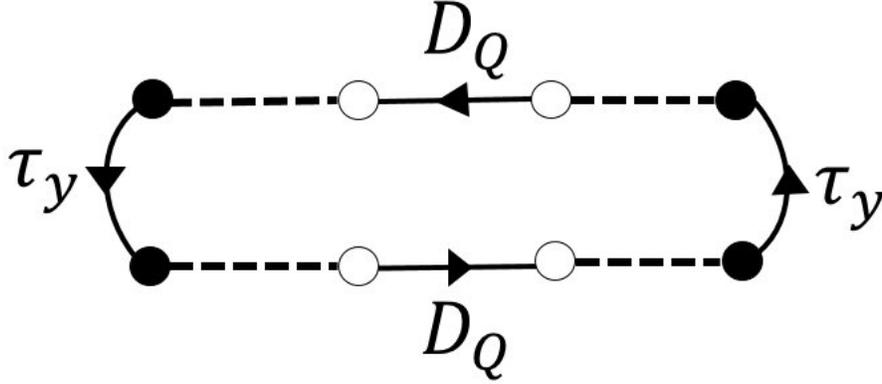


Figura 3.8: Representação diagramática de $Tr[\tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T]$, perceba a semelhança com o diagrama de $f_{2, chECO}$ na figura 3.2 (b).

$$Tr(\tau_y^n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \pm 2N, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (3.54)$$

$$Tr(D_Q^n) = \begin{cases} 2Q, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2N, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (3.55)$$

Vale ressaltar que a variação no sinal de $2N$ no $Tr(\tau_y)$ é devido a matriz de Pauli τ_y não ser diagonal, na prática, os ciclos- T 's referentes ao traço da matriz de Pauli agora levam em conta o sentido das setas, ou seja, passando na mesma direção da seta, teremos $+2N$, passando na direção oposta teremos $-2N$ e portanto a análise dos diagramas deve ser mais cuidadosa. A média do diagrama da figura 3.8 gera os mesmos nove diagramas da figura 3.5, mas devido as restrições impostas pela equação 3.54 três deles se anulam, todos estão mostrados na figura 3.9.

Da análise dos nove diagramas, juntamente com a equação 3.53 e os pesos ainda dados pelas equações 3.5 e 3.7, chegamos a

$$\langle G_{NS} \rangle = \frac{1}{4} G_0 \left(2N + \frac{4Q^2 - 2N}{2N - 1} \right). \quad (3.56)$$

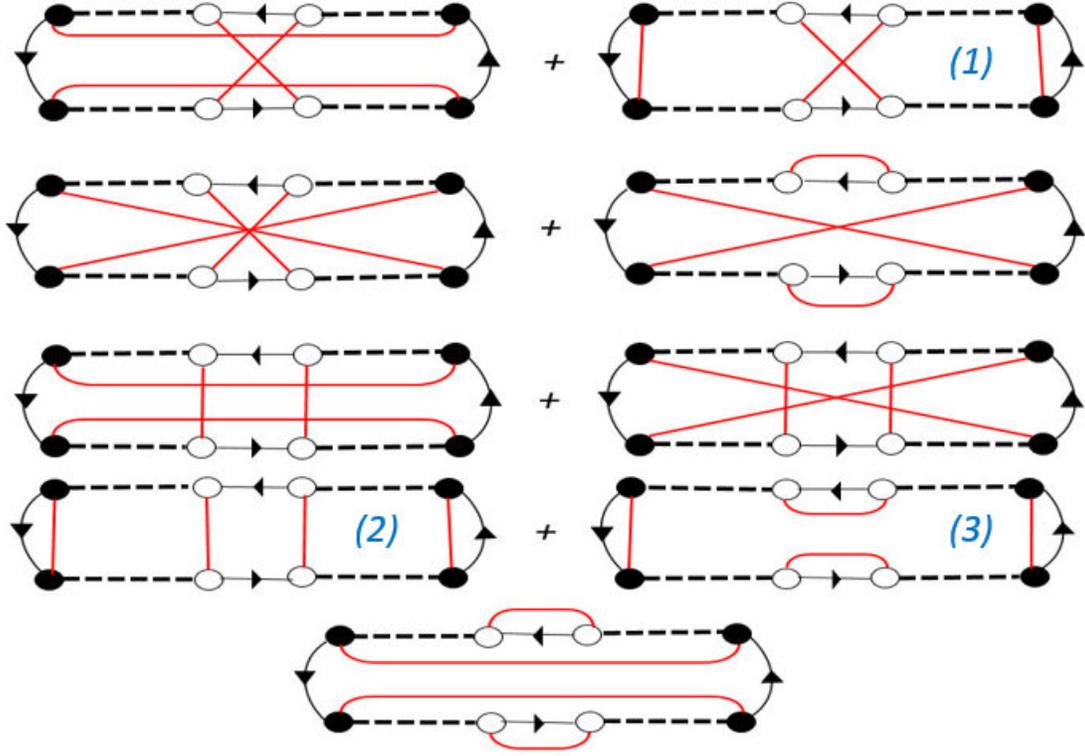


Figura 3.9: Representação diagramática de $\langle Tr[\tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T] \rangle$, note que os diagramas marcados com (1), (2) e (3) possuem pelo menos um $(Tr\tau_y)^2$, como resultado de um ciclo- T , anulando-os.

Equação que está de total acordo com a referência [10], onde ela foi encontrada usando uma técnica diferente da diagramática. Para a variância desta condutância, precisamos encontrar G_{NS}^2 a partir da equação 3.53, começamos com

$$G_{NS}^2 = \frac{1}{4} G_0 Tr(\mathbb{I} + \Lambda) \cdot \frac{1}{4} G_0 Tr(\mathbb{I} + \Lambda), \quad (3.57)$$

onde introduzimos $\Lambda = \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T$, dessa forma avançamos para:

$$G_{NS}^2 = \frac{1}{16} G_0^2 (2N + Tr\Lambda) \cdot (2N + Tr\Lambda) \quad (3.58)$$

e portanto:

$$\langle G_{NS}^2 \rangle = \frac{1}{16} G_0^2 [4N^2 + 4N \langle Tr\Lambda \rangle + \langle (Tr\Lambda)^2 \rangle] \quad (3.59)$$

Nosso objetivo agora é tratar o termo problemático $(Tr\Lambda)^2$, mais uma vez a luz do MD,

montamos o seu respectivo diagrama na figura 3.10 e podemos perceber que ele é parecido ao diagrama de $f_{2,chECO}^2$ trabalhado no início deste capítulo, onde vimos que sua média gerou 11025 diagramas, da mesma forma teremos os mesmos diagramas aqui, mas felizmente, a restrição imposta pela matriz de Pauli vai anular muitos desses diagramas, restando "apenas" 6300 não-nulos, ver figura 3.11.

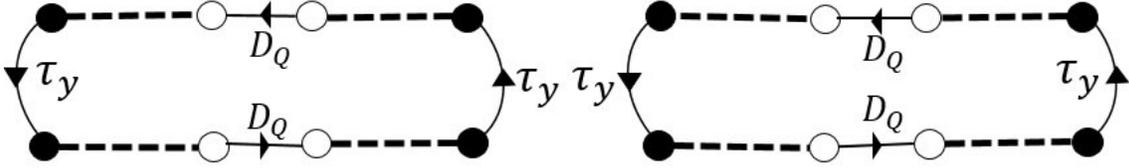


Figura 3.10: Representação diagramática de $(Tr\Lambda)^2$.

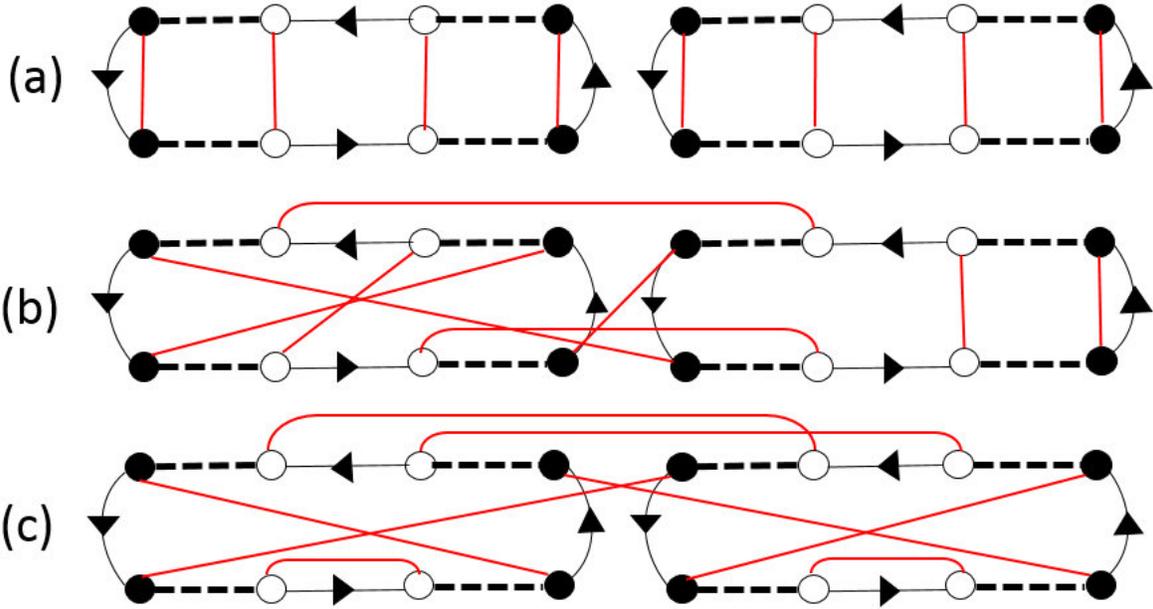


Figura 3.11: Três exemplos do conjunto dos 6300 diagramas pertencentes a $\langle Tr[\tau_y O D_Q O^T \tau_y O D_Q O^T] \rangle$, novamente, a presença de vários $Tr\tau_y$, garante que o diagrama (a) é nulo.

Depois de um árduo trabalho de construção e interpretação dos 6300 diagramas, juntamente com a análise da equação 3.56, encontramos as seguintes expressões

$$\langle Tr\Lambda \rangle = \frac{(4Q^2 - 2N)}{(2N - 1)}, \quad (3.60)$$

$$\langle (Tr\Lambda)^2 \rangle = \frac{[4(10N^3 - 13N^2 - 8N^2Q^2 + 8NQ^4 - 12NQ^2 + 16Q^2 - 4Q^4)]}{(2N - 3)(2N - 1)(2N + 1)}. \quad (3.61)$$

Encontrando assim todos os termos da equação 3.59, de tal forma que

$$\langle G_{NS}^2 \rangle = \frac{(N^2 - N + 2Q + Q^2)(N^2 - N - 2Q + Q^2)}{(2N + 1)(2N - 3)}. \quad (3.62)$$

Por conseguinte, com a variância dada por

$$Var(G_{NS}) = \langle G_{NS}^2 \rangle - \langle G_{NS} \rangle^2 \quad (3.63)$$

e substituindo o quadrado da equação 3.56 e a equação 3.62, obtemos sua forma final

$$Var(G_{NS}) = \frac{4(N - 1 + Q)(N - Q)(N - 1 - Q)(N + Q)}{(2N + 1)(2N - 3)(2N - 1)^2}. \quad (3.64)$$

Também de perfeito acordo com a referência [10], encontrada pelos autores a partir de outra técnica matemática.

3.4 O ruído de disparo normal-supercondutor com simetria de rotação de spin (P_{NS})

Apesar do grande empenho, até o momento apenas recuperamos os resultados obtidos no trabalho tomado como base, referência [10], onde seus pesquisadores se limitaram a análise de G_{NS} , porém, nossa aplicação do método diagramático nos permite encontrar outro observável importante, o ruído de disparo normal-supercondutor P_{NS} , vamos começar pela equação 3.29

$$\frac{P_{NS}}{P_0} = \frac{G_{NS}}{G_0} - h_{NS} \quad (3.65)$$

e portanto precisamos primeiro determinar uma forma adequada ao MD para h_{NS} , que por sua vez é dada pela equação 3.33

$$h_{NS} = Tr[P_1 r_{he} P_2 r_{he}^\dagger P_1 r_{he} P_2 r_{he}^\dagger]. \quad (3.66)$$

Esta equação nada mais é que a equação 3.32 para G_{NS} , exceto com o argumento do traço ao quadrado, portanto podemos realizar o mesmo tratamento dado a G_{NS} na subseção anterior,

obtendo também uma expressão em termos de \mathbb{A} e \mathbb{B}

$$h_{NS} = Tr(\mathbb{A} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{B} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{A} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{B} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T). \quad (3.67)$$

Com \mathbb{A} e \mathbb{B} dados pela equação 3.46, avançamos então para

$$h_{NS} = Tr \left[\frac{1}{2} (\mathbb{I} - \tau_y) \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \right]. \quad (3.68)$$

O que nos leva a equação

$$\begin{aligned} h_{NS} = \frac{1}{16} Tr [& (\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T - \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T - \\ & \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T + \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T) \\ & (\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T - \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T - \\ & \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T + \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)] \end{aligned} \quad (3.69)$$

Este produto vai gerar dezesseis termos, vamos analisar um a um, suprimindo temporariamente a constante $\frac{1}{16}$ que multiplica todos eles

$$Tr[(\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)(\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)] = Tr(D_Q^4) = 2N; \quad (3.70)$$

$$Tr[(\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)(-\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)] = -Tr(D_Q^4 \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O}) = 0; \quad (3.71)$$

$$Tr[(\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)(-\tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)] = -Tr(D_Q^4 \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O}) = 0; \quad (3.72)$$

$$Tr[(\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)(\tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)] = Tr(\Lambda); \quad (3.73)$$

$$Tr[(-\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)(\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)] = -Tr(D_Q^4 \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O}) = 0; \quad (3.74)$$

$$Tr[(-\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)(-\mathbb{I} \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T)] = -Tr(\tau_y^2) = 2N; \quad (3.75)$$

$$Tr[(-\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(-\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T) = Tr(\Lambda); \quad (3.76)$$

$$Tr[(-\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)] = -Tr(\tau_y) = 0; \quad (3.77)$$

$$Tr[(-\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)] = -Tr(\mathcal{O}\tau_y\mathcal{O}^TD_Q^4) = 0; \quad (3.78)$$

$$Tr[(-\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(-\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)] = Tr(\Lambda); \quad (3.79)$$

$$Tr[(-\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(-\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)] = -Tr(\tau_y^2) = 2N; \quad (3.80)$$

$$Tr[(-\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)] = -Tr(\tau_y) = 0; \quad (3.81)$$

$$Tr[(\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)] = Tr(\Lambda); \quad (3.82)$$

$$Tr[(\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(-\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)] = -Tr(\tau_y) = 0; \quad (3.83)$$

$$Tr[(\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(-\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\mathbb{I}\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)] = -Tr(\tau_y) = 0; \quad (3.84)$$

$$Tr[(\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)(\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T)] = Tr(\Lambda^2). \quad (3.85)$$

Onde a análise foi feita baseada nas propriedades já apresentadas neste capítulo, tal como $\mathcal{O}\mathcal{O}^T = \mathbb{I}$. Por certo a síntese de todos estes termos nos fornece que

$$h_{NS} = \frac{1}{16}[6N + 4Tr(\Lambda) + Tr(\Lambda^2)] \quad (3.86)$$

e conseqüentemente, com o ruído de disparo dado pela equação 3.65, nosso único obstáculo é justamente o termo $Tr(\Lambda^2)$. Vamos lembrar que

$$Tr(\Lambda) = Tr(\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T\tau_y\mathcal{O}D_Q\mathcal{O}^T) \quad (3.87)$$

e portanto

$$Tr(\Lambda^2) = Tr(\tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T \tau_y \mathcal{O} D_Q \mathcal{O}^T). \quad (3.88)$$

A primeira equação foi destrinchada por nós usando o MD , a segunda não será diferente, na figura 3.12 vemos o seu diagrama, que se assemelha ao diagrama de $(Tr\Lambda)^2$, veja figura 3.10.

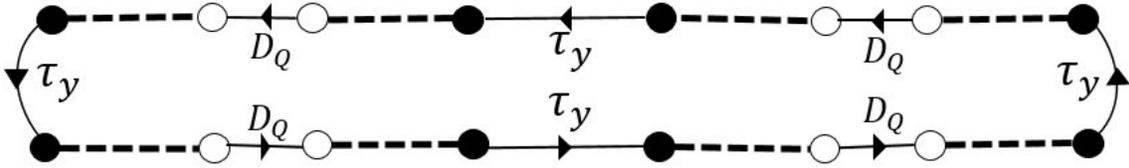


Figura 3.12: Representação diagramática de $Tr(\Lambda^2)$.

A média de $Tr(\Lambda^2)$ é obtida nos mesmos moldes da média de $(Tr\Lambda)^2$ que obtivemos anteriormente, também teríamos 11025 diagramas possíveis mas restando 6300 não-nulos, alguns exemplos estão montados na figura 3.13.

Montados e analisados todos os diagramas, encontramos a seguinte expressão

$$Tr(\Lambda^2) = \frac{2(4N^3 - 10N^2 + 16N^2Q^2 + 3N - 16NQ^2 + 8Q^2 - 8Q^4)}{(2N - 3)(2N - 1)(2N + 1)}. \quad (3.89)$$

Este resultado, em conjunto com a expressão da $\langle Tr\Lambda \rangle$, equação 3.60, nos leva a encontrar $\langle h_{NS} \rangle$, que é a média da equação 3.86

$$\langle h_{NS} \rangle = \frac{3N^4 - 6N^3 + 3N + 6N^2Q^2 - 6NQ^2 - 2Q^2 - Q^4}{(2N - 3)(2N - 1)(2N + 1)}. \quad (3.90)$$

Finalmente com $\langle h_{NS} \rangle$ encontrada e como já obtivemos a $\langle G_{NS} \rangle$, podemos voltar a equação do ruído de disparo (3.65) e assim determinar sua média

$$\langle P_{NS}/P_0 \rangle = \frac{(N - Q)(N - 1 - Q)(N + Q)(N - 1 + Q)}{(2N - 3)(2N - 1)(2N + 1)}. \quad (3.91)$$

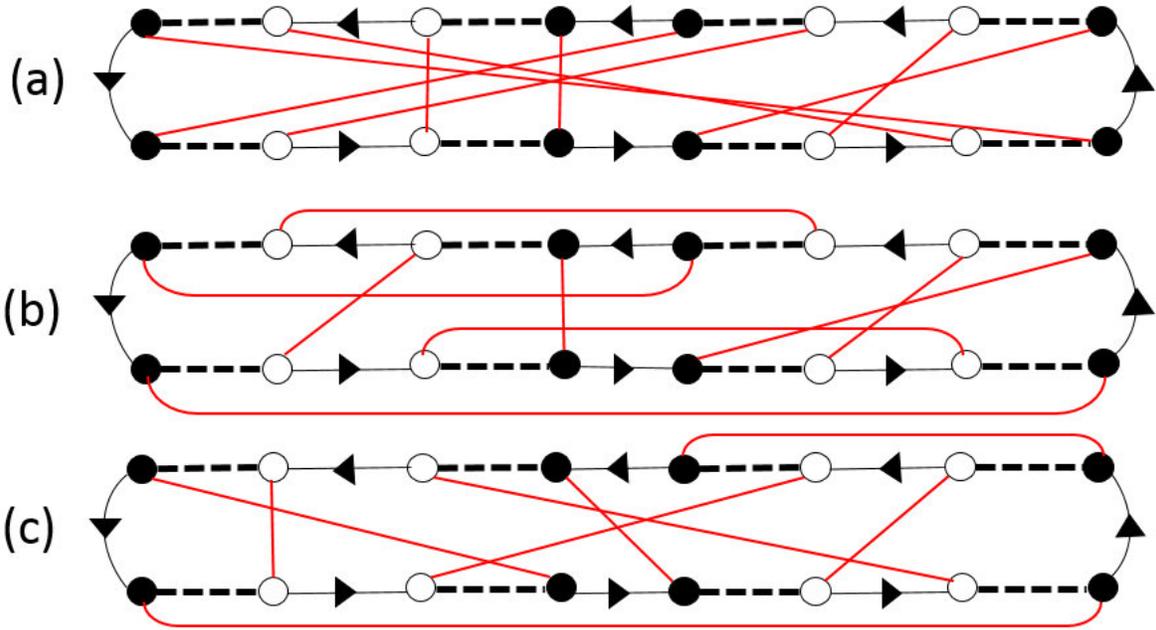


Figura 3.13: Três exemplos do conjunto dos 6300 diagramas pertencentes a $\langle Tr(\Lambda^2) \rangle$, neste caso temos representantes dos pesos $V_{1,1,1,1}$, $V_{1,1,2}$ e V_4 em (a), (b) e (c) respectivamente.

Esta equação, que está de comum acordo com as simulações, é um dos principais resultados deste trabalho.

3.5 A condutância e o ruído de disparo normal-supercondutor com simetria de rotação de spin quebrada

A aplicação do MD para análise de G_{NS} e P_{NS} se revelou vantajosa na obtenção destas grandezas com relação a quebra da SRS , pois as regras de obtenção são as mesmas que utilizamos no caso do ECS da classe WD tanto neste capítulo quanto no segundo, de forma objetiva, com a aplicação dos passos citados, encontramos que

$$\langle G_{NS}/G_0 \rangle_{chECS} = \frac{(2N^2 + N + 2Q^2)}{(4N + 1)}, \quad (3.92)$$

$$Var(G_{NS}/G_0)_{chECS} = \frac{4(N - Q)(N + Q)(2N + 1 + 2Q)(2N + 1 - 2Q)}{(4N + 1)^2(4N - 1)(4N + 3)}, \quad (3.93)$$

$$\langle P_{NS}/P_0 \rangle_{chECS} = \frac{2(N - Q)(N + Q)(2N + 1 + 2Q)(2N + 1 - 2Q)}{(4N + 3)(4N + 1)(4N - 1)}. \quad (3.94)$$

3.6 Fator Fano Topológico e o Limite semi-clássico

Da mesma forma que fizemos no capítulo 2, podemos expandir as expressões encontradas aqui para G_{NS} e P_{NS} afim de analisar a relação do fator Fano e o número topológico. Pois bem, no regime semi-clássico, Q da ordem de $N \gg 1$, expandindo as equações 3.56 e 3.91

$$\langle g_{NS} \rangle = \frac{N}{2} - \frac{1}{4} + \frac{Q^2 - 1/4}{2N} + \mathcal{O}(N^{-2}), \quad (3.95)$$

$$\langle p_{NS} \rangle = \frac{N}{8} - \frac{1}{16} - \frac{Q^2}{8N} \left(\frac{N - 1/2}{N} \right) + \mathcal{O}(N^{-3}). \quad (3.96)$$

Onde $g_{NS} = G_{NS}/G_0$ e $p_{NS} = P_{NS}/P_0$. Nas duas expressões, os três termos correspondem a contribuição normal, a localização fraca e a contribuição topológica, respectivamente. Com uma pequena manipulação das equações 3.98 e 3.99 chegamos a

$$F_{NS} = \frac{1}{4} \frac{(N^2 - Q^2)}{(N^2 + Q^2)}. \quad (3.97)$$

Esta belíssima equação, é o resultado mais importante desta dissertação, a qual vale notar dois limites interessantes:

- Para valores de Q 's imensos, da ordem de N , o fator Fano se anula, e como vimos anteriormente, $F = 0$, fisicamente indica uma transmissão absoluta, ou seja, é como se tivéssemos apenas olhando para um supercondutor;
- Com Q tendendo a zero, o fator Fano assume justamente o valor $\frac{1}{4}$, o que de certo é esperado para o caso da cavidade conectada a guias normais, como visto no capítulo 2.

Por fim, devido a vantagem proporcionada pelo MD com relação ao casos simpléticos, podemos ainda encontrar o fator Fano para o caso da SRS quebrada, bastando proceder da mesma forma anterior, expandindo as equações 3.92 e 3.94

$$\langle g_{NS} \rangle = \frac{N}{2} + \frac{1}{8} + \frac{Q^2}{2N} \left(\frac{N - 1/8}{N} \right) + \mathcal{O}(N^{-2}), \quad (3.98)$$

$$\langle p_{NS} \rangle = \frac{N}{8} + \frac{1}{32} - \frac{Q^2}{8N} \left(\frac{N + 1/4}{N} \right) + \mathcal{O}(N^{-2}). \quad (3.99)$$

Que por sua vez, converge exatamente para a equação 3.97:

$$F_{NS} = \frac{1}{4} \frac{(N^2 - Q^2)}{(N^2 + Q^2)}. \quad (3.100)$$

Como esperado, pois na prática a dimensão da matriz r foi dobrada. Podemos ainda inferir que independente da presença da interação spin-órbita o fator Fano continuou invariante, confirmando a característica atribuída ao número quântico topológico Q , no sentido da proteção topológica do sistema mesmo havendo perturbações.

Capítulo 4

Conclusões

“Toda a nossa ciência, se comparada com a realidade, é primitiva e infantil e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos”

-Albert Einstein

Neste dissertação, trabalhamos com uma área muito recente da física mesoscópica, os chamados materiais topológicos. O objetivo principal foi encontrar resultados analíticos para os principais observáveis do transporte eletrônico através de uma cavidade caótica balística, conectada a dois guias, um metal-normal e outro um supercondutor topológico. De acordo com a classificação dos estados topológicos da matéria, ou *tenfold way*, os supercondutores topológicos possuem um número quântico topológico Q , que é responsável pelo aparecimento de estados protegidos topologicamente nas pontas do supercondutor [8]. Devido a relação entre o número topológico e a transmissão da cavidade, procuramos encontrar a condutância, sua média e variância - e o ruído de disparo em função deste número topológico. Neste contexto, utilizamos o método diagramático proposto por Brouwer e Beenakker, primeiramente reobtendo estes observáveis para os três ensembles da classe Wigner-Dyson e depois estendendo-o para englobar outra classe importante, isso porque a presença da simetria de sub-rede (*SLS*) e a simetria elétron-buraco (*PHS*) coloca nossa cavidade no ensemble *BDI* da classe quiral.

A aplicação do método diagramático gerou um trabalho descomunal, onde foram confeccionados e analisados mais de 15000 diagramas manualmente, mas o objetivo foi alcançado com sucesso, pois reobtivemos os resultados exatos da média da condutância e sua variância, obtidos primeiramente na referência [10], ainda encontramos a média da condutância e sua variância para o caso da simetria de rotação de spin quebrada, assim como o ruído de disparo normal-supercondutor para este problema, também com presença e ausência da simetria de rotação de spin. Além disso, com a determinação de G_{NS} e P_{NS} encontramos um parâmetro

importante do transporte mesoscópico, sendo o resultado mais importante deste trabalho, o fator Fano e tanto ele quanto o ruído de disparo foram encontrados em função do número topológico Q , estes até então, inéditos.

Numa outra interpretação para o número quântico topológico Q , alguns físicos acreditam que ele contabiliza o número de canais dos fermiões de Majorana ou modos superficiais de Majorana¹. Um fermion de Majorana é a superposição de um elétron e um buraco de mesma banda de spin, estas partículas exóticas não tem carga e possuem a chamada memória quântica, ou seja, podem armazenar e transportar informação sem sofrer qualquer tipo de perturbação externa (*daí o termo proteção topológica*). Neste contexto vale citar o PRL/2007 de C.J Bolech e E.Demler, referência [59], eles mostraram um aparato experimental capaz de medir o aparecimento (*ou não*) dos modos de majorana, para isso eles utilizaram medidas do fator fano, no caso deles (*que tratavam um sistema diferente, inclusive sem caos*) um $F = 0$ indicava presença dos modos e $F = 1/2$ ausência. Estes resultados fortalecem o nosso no sentido de que encontramos uma relação bem mais clara entre os limites de N e Q como também a possibilidade de construção de um experimento real. De qualquer forma, infelizmente os fermions de majorana ainda não foram descobertos, caso isso aconteça, estaremos mais perto da construção dos denominados computadores quânticos [50]. Com base no trabalho desenvolvido, diversas possibilidades de trabalhos futuros foram identificadas. Algumas como: obtenção das distribuições de probabilidade do ruído de disparo, bem como sua variância e principalmente novas pesquisas realizadas com o estudo da classe Altland-Zirnbauer que envolvem tanto supercondutores topológicos quanto isolantes topológicos.

¹Primeiramente idealizados pelo físico italiano Ettore Majorana por volta de 1937.

Referências Bibliográficas

- [1] PEREZ, S. R. *Fenômenos de Transporte Coerente em Sistemas Mesoscópicos*. Tese de Doutorado, UFPE, (2009).

- [2] DATTA, S. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press, (1995).

- [3] JUNIOR, A. J. N. *Bilhar de Dirac Caótico: Uma Abordagem Via Teoria de Matrizes Aleatórias*. Tese de Mestrado, UFRPE, (2014).

- [4] SANTOS, A. P. *Propriedades Universais de Transporte em Cavidades da Classe BDG*. Tese de mestrado, Departamento de Física-UFRPE, Recife-PE (2011).

- [5] OSTERMANN, F.; FERREIRA, L.M. and CAVALCANTI, C.J.H. *Supercondutividade-uma proposta de inserção no ensino médio*. série de textos de apoio ao professor de física, UFRGS, PAS, N° 8, (1998).

- [6] STUDART, N. *Prêmio Nobel de Física 2003 Física na Escola*, Departamento de Física, Universidade Federal de São Carlos, v. 4, n. 2 (2003).

- [7] DIEZ, M. *On electronic signatures of topological superconductivity*. (2015).

- [8] BEENAKKER, C.W.J. *Random-matrix theory of Majorana fermions and topological superconductor*. Rev. Mod. Phys. 87, number 3, 101103/1037, July-September-(2015).

- [9] MOURIK, V.; Zuo, K.; FROLOV, S.M.; PLISSARD, S.R.; BAKKERS, E.P.A.M. and KOUWENHOVEN, L.P. *Science*. 336, 1003, (2012).
- [10] DIEZ, M.; DAHLHAUS, J.P.; WIMMER, M.; BEENAKKER and C.W.J. *Andreev reflection from a topological superconductor with chiral symmetry*. Phys. Rev. B 86, 94501 (2012).
- [11] RYU, S.; SCHNYDER, A.P.; FURUSAKI, A. and LUDWIG, A.W.W. *Topological insulators and superconductors: tenfold way and dimensional hierarchy*. New Journal of Physics, 12, 065010 (60pp), doi:10.1088/1367-2630/12/6/065010, (2010).
- [12] BEENAKKER, C.W.J. *Why does a metal-superconductor junction have a resistance?*. cond-mat/9909293, v2, (2007).
- [13] MACEDO JR., A. F. *Propriedades Universais de Transporte em Pontos Quânticos com Simetria Quiral*. Tese de mestrado, Departamento de Física-UFPE, Recife-PE (2002).
- [14] NAPOLITANO, J.; SAKURAI, J. J. *Mecânica Quântica Moderna*. tradução técnica: Sílvia Renato Dahmen, 2ed.-Porto Alegre, (2013).
- [15] VASCONCELOS, T.C. *Flutuações Universais da Condutância de Spin-Hall em uma Cavidade Caótica de Dirac*. Tese de mestrado, Departamento de Física-UFRPE, Recife-PE (2016).
- [16] BARBOSA, A. L. R. *Estatística de Contagem de Carga e Efeitos de Interferência em Sistemas Mesoscópicos*. Tese de Doutorado, UFPE, (2009).
- [17] BEENAKKER, C. W. J.; *Applications of random matrix theory to condensed matter and optical physics*. arXiv:0904.1432v2, (2009).

- [18] BLANTER, Ya. M.; BÜTTIKER, M. *Shot Noise in Mesoscopic Conductors*. Phys. Report, 1:336, (2000).
- [19] GRIFFITHS, D.J.. *Mecânica Quântica*. Editora Pearson, 2e, (2013).
- [20] SALINAS, S.R.A. *Introdução à Física Estatística*. Editora da Universidade de São Paulo, (2013).
- [21] DE JONG, M. *Sub-Poissonian shot noise*. Publicado na Physics World, pag.22, Agosto de (1996).
- [22] BEENAKKER, C.W.J.; SCHONENBERGER, C. *Quantum Shot Noise*. Publicado na Physics Today, pag.37, Maio de (2003).
- [23] BEENAKKER, C. W. J.; de JONG, M. J. M. *Doubled Shot Noise in Disordered Normal-Metal-Superconductor Junctions*. Phys. Rev. B 49, number 22, (1994).
- [24] FILHO, G. C. D. *Estatística de Contagem de Carga e Teoria Quântica de Circuitos em Sistemas Híbridos Metal Normal-Superconductor e em Cadeias de Pontos Quânticos*. Tese de Doutorado, UFPE, (2010).
- [25] BEENAKKER, C. W. J. *Quantum transport in semiconductor-superconductor micro junctions*. Phys. Rev. B 46, number 19, (1992).
- [26] LAMBERT, C.J and RAIMONDI, R. *Phase-coherent transport in hybrid superconducting nanostructures*. J. Phys.: Condens Matter, vol. 10, pag. 901, (1998).
- [27] BEENAKKER, C.W.J.; and BUTTIKER, M. *Suppression of shot noise in metallic diffusive conductors*. Phys. Rev. B 46, 1889, (1992).

- [28] WISHART, J. *The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population*. Biometrika, 20 A:3243, (1928).
- [29] SILVA, G.L.F. *Universalidade em Matrizes Aleatórias*. Poster-resumo, Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP.
- [30] GUHR, T.; MULLER, A.; WEIDENMULLER, H.A. *Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts*.
- [31] BEENAKKER, C. W. J. *Random-matrix theory of quantum transport*. Rev. Mod. Phys. 69, number 3, (1997).
- [32] DYSON, F. J. *Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I*. Journal of Mathematical Physics, 3(1):140-156, (1962).
- [33] BARROS, M. S. M. *Método Diagramático Aplicado ao Bilhar de Dirac Caótico*. Tese de mestrado, Departamento de Física-UFRPE, Recife-PE (2014).
- [34] AKMEROV, A. R. *Dirac and Majorana edge states in graphene and topological superconductor*. ISBN 978-90-8593-101-0, (2011).
- [35] WIGNER, E. P. *Characteristic Vectors of Bordered Matrices With Infinite Dimensions*. Annals of Mathematics. 62(3):548-564, (1955).
- [36] SHURYAK, E.V. and VERBAARSCHOT, J.J.M. *Random matrix theory and spectral sum rules for the Dirac operator in QCD*. Nucl. Phys. A. 560:306 (1993).
- [37] VERBAARSCHOT, J.J.M. *Spectrum of the QCD Dirac operator and chiral random matrix theory*. Phys. Rev. Lett. 72:2531 (1994).

- [38] ALTLAND, A. and ZIRNBAUER, M.R. *Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures*. Phys. Rev. B 55:1142 (1997).
- [39] JACQUOD, J. M. P.; WHITNEY, R. S.; BÜTTIKER, M. *Onsager relations in coupled electric, thermoelectric, and spin transport: The tenfold way*. Phys. Rev. B. 86, 155118, (2012).
- [40] VALLEJOS, R. O.; ALMEIDA, A. M. O. *Caos e Mecânica Quântica* Grupo de Caos Quântico, CBPF, Pronex.(2016).
- [41] BEENAKKER, C. W. J.; BROUWER, P. W. *Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems*. J. Math. Phys. 37,4904, (1996).
- [42] BARROS, M. S. M. et al *Open Chaotic Dirac Billiards: Weak(anti) localization, conductance fluctuations and decoherence*. Phys. Rev. B 88, 245133, (2013).
- [43] MELLO, P. A. e KUMAR, N. *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations*. Oxford University press, (2004).
- [44] RAMOS, J. G. G. S.; BARBOSA, A. L. R.; MÂCEDO, A. M. S. *Average shot-noise power via a diagrammatic method*. J. Phys. A: Math. Theor. 43, (2010).
- [45] RUNGER, G.C.; MONTGOMERY, D.C. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 3rd ed. Mídia em CD, (2002).
- [46] RICHTER, K.; WURM, J.; ADAGIDELE, I. *Edge effect in graphene non structures: Semiclassical theory of spectral fluctuations and quantum transport fluctuations and quantum transport*. Phys. Rev. B 84, 205421, (2011).

- [47] SWITKES, M. *Decoherence and Adiabatic Transport in Semiconductor Quantum Dots*. Tese de doutorado, Departamento de Física da Universidade de Stanford, (1999).
- [48] COLLINS, B.; SNIADY, P. *Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group*. arXiv: math-ph/0402073v1, (2004).
- [49] FULGA, I.C.; HASSLER, F.; AKHMEROV, A.R. and BEENAKKER *Scattering formula for the topological quantum number of a disordered multi-mode wire*. Phys. Rev. B 83, 155429, (2011).
- [50] PIKULIN, D.I. *On topological properties of superconducting nanowires*. Tese de doutorado, Universidade de Leiden, (2013).
- [51] BERRY, M. J.; KATINE, J. A.; WESTERVELT, R. M. and GOSSARD, A. C. *Influence of shape on electron transport in ballistic quantum dots*. Phys. Rev. B 50, 17721 (1994).
- [52] BEENAKKER, C.W.J. *Andreev billiards*. cond-mat/0406018, v3, (2004).
- [53] LANDAUER, R. *Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localization Scatters in Metallic Conduction*, IBM J. Res. Develop.,1,223,(1957).
- [54] LANDAUER, R. *Electrical Resistance of Disordered One-Dimensional Lattices*, Phil. Mag.,21,823,(1970).
- [55] BUTTIKER, M. *Four-Terminal Phase Coherent Conductance*, Phys. Rev. Lett., 57, 1761, (2005).
- [56] BOHIGAS, O.; GIANNONI, M. J.; SCHIMIT, C. *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*. Phys. Rev. Lett. 52, 1 (1984).

- [57] BLONDER, G.E.; TINKHAM, M.; KLAPWIJK, T.M.; *Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting micro constrictions: Excess current, charge imbalance and super-current conversion.* Phys. Rev. B 25, number 7, (1982).
- [58] OLIVEIRA, E.J. *Transporte Quântico Decoerente em Sistemas Mesoscópicos.* Tese de mestrado, Departamento de Física-UFSE, São Cristóvão-SE (2015).
- [59] BOLECH, C.J.; DEMLER, E. *Observing Majorana bound States in p-Wave Superconductors Using Noise Measurements in Tunneling Experiments.* Phys. Rev. Lett., 98, 237002, (2007).